

1. Matematika fani olimpiadalarida arifmetik va geometrik progressiyalar

1.1. Progressiya tushunchasi

Progressiya — bu sonlar ketma-ketligi bo‘lib, uning hadlari ma’lum qonuniyat asosida tuziladi. Olimpiada masalalarida progressiyalar **algebra, tenglama, tengsizlik, sonlar nazariyasi va kombinatorika** bilan uzviy bog‘langan holda uchraydi.

Asosiy ikki tur ajratiladi:

- 📖 **arifmetik progressiya (AP)**
- 📖 **geometrik progressiya (GP)**

1.2. Arifmetik progressiya

Ta’rif

Ketma-ketlikning har bir hadi undan oldingi hadga bir xil son qo‘shish orqali hosil qilinsa, u **arifmetik progressiya** deyiladi.

Agar ketma-ketlik:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

bo‘lsa, u holda:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = d$$

bu yerda d — **ayirma**.

Umumiy had formulasi

Arifmetik progressiyaning n -hadi:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Dastlabki n hadlar yig‘indisi

$$S_n = n(a_1 + a_n)/2$$

yoki

$$S_n = n(2a_1 + (n - 1)d)/2$$

1.3. Arifmetik progressiyaning olimpiadalardagi roli

Olimpiada masalalarida AP:

- 📖 hadlar sonini aniqlash;
- 📖 noma’lum a_1 yoki d ni topish;

- 📖 hadlar yig'indisini baholash;
- 📖 progressiya sharti ostida tenglama yoki tengsizlik tuzish

uchun qo'llanadi.

Ko'pincha AP sharti **yashirin** bo'ladi, masalan:

a, b, c arifmetik progressiya hadlari deyilsa,

$b = (a + c)/2$ munosabati darhol ishlatiladi.

1.4. Geometrik progressiya

Ta'rif

Ketma-ketlikning har bir hadi undan oldingi hadni bir xil songa ko'paytirish orqali hosil qilinsa, u **geometrik progressiya** deyiladi.

Agar:

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$$

bo'lsa, u holda:

$$b_2/b_1 = b_3/b_2 = \dots = q$$

bu yerda q — **maxraj**.

Umumiy had formulasi

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Dastlabki n hadlar yig'indisi ($q \neq 1$)

$$S_n = b_1(q^n - 1)/(q - 1)$$

1.5. Cheksiz geometrik progressiya

Agar $|q| < 1$ bo'lsa, cheksiz geometrik progressiya mavjud bo'ladi va uning yig'indisi:

$$S = b_1/(1 - q)$$

Olimpiadalarda bu formula:

- 📖 baholash masalalarida,
- 📖 funksiya qiymatini topishda,
- 📖 ketma-ket jarayonlarni modellashtirishda

ishlatiladi.

1.6. Geometrik progressiyaning olimpiadalaridagi xususiyatlari

Olimpiada masalalarida GP:

- 📖 eksponent o'sish yoki kamayishni ifodalaydi;
- 📖 logarifmik o'zgartirishlar bilan bog'lanadi;
- 📖 tenglama va tengsizliklarga olib keladi;
- 📖 ba'zan **irratsional yoki parametrl**i masalalarga ulanadi.

Masalan, agar a, b, c geometrik progressiya bo'lsa,
 $b^2 = a \cdot c$ tenglik muhim asosiy bog'lanish hisoblanadi.

1.7. Arifmetik va geometrik progressiyalarni solishtirish

Xususiyat	Arifmetik progressiya	Geometrik progressiya
Asosiy amal	Qo'shish	Ko'paytirish
Bog'lanish	$b - a = c - b$	$b^2 = a \cdot c$
O'sish turi	Chiziqli	Eksponential
Olimpiadadagi roli	Yig'indi, baholash	Tez o'sish, chegaralar

1.8. Olimpiada masalalariga xos yondashuv

Olimpiadalarda progressiyalar bilan ishlashda:

1. formulani bevosita qo'llash yetarli bo'lmaydi;
2. yashirin progressiyani aniqlash talab qilinadi;
3. AP va GP ni birgalikda ishlatish holatlari uchraydi;
4. mantiqiy xulosalar muhim ahamiyatga ega.

Shuning uchun o'quvchi:

1. formulalarni yoddan bilishi;
2. ularni qachon va qanday qo'llashni tushunishi;
3. natijani tekshirishga odatlanishi kerak.

Xulosa

Arifmetik va geometrik progressiyalar — olimpiada matematikasining asosiy va eng samarali vositalaridan biri bo'lib, ular orqali murakkab masalalarni soddaroq mantiqiy zanjirga keltirish mumkin. Ushbu mavzuni chuqur o'zlashtirish o'quvchining algebraik tafakkurini sezilarli darajada rivojlantiradi.

2. Metodik yordam

(Arifmetik va geometrik progressiyalarni olimpiadaga yo'naltirib o'qitish)

2.1. Mavzuni o'qitishda asosiy yondashuv

Arifmetik va geometrik progressiyalarni o'qitishda asosiy maqsad — formulani yodlatish emas, balki **progressiyani masala ichidan tanib olish** ko'nikmasini shakllantirishdir. Olimpiada masalalarida progressiya ko'pincha **yashirin shart** sifatida beriladi.

Tavsiya etiladigan ketma-ketlik:

1. ketma-ketlik turi (AP yoki GP) ni aniqlash;
2. asosiy bog'lanishni yozish (d yoki q);
3. umumiy had yoki yig'indi formulalarini tanlash;
4. olingan natijani mantiqan tekshirish.

2.2. O'quvchilarda shakllantirilishi zarur bo'lgan ko'nikmalar

O'quvchi:

- ≈ a, b, c arifmetik progressiya bo'lsa $b = (a + c)/2$ ekanini darhol ko'ra olishi;
- ≈ a, b, c geometrik progressiya bo'lsa $b^2 = a \cdot c$ ni qo'llay olishi;
- ≈ n -had va S_n formulalarini chalkashtirmasligi;
- ≈ manfiy yoki kasr maxrajli GP holatlarida ehtiyotkor bo'lishi kerak.

2.3. Tipik metodik xatolar

- AP va GP formulalarini aralashtirib yuborish;
- $q < 0$ bo'lgan geometrik progressiyani noto'g'ri talqin qilish;
- cheksiz GP da $|q| < 1$ shartini unutish;
- yig'indi formulasida hadlar sonini noto'g'ri olish.

Bu xatolarni bartaraf etish uchun **noto'g'ri yechimlarni tahlil qilish** juda samarali.

2.4. Oddiy darajadagi misollar (5 ta)

1-misol

Arifmetik progressiyaning $a_1 = 3, d = 5$ bo'lsa, a_6 ni toping.

Yechish:

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + (n - 1)d \\a_6 &= 3 + 5 \cdot 5 = 28\end{aligned}$$

Javob: 28

2-misol

Arifmetik progressiyaning birinchi hadi 2, oxirgi hadi 20 va hadlar soni 10 bo'lsa, S_{10} ni toping.

Yechish:

$$\begin{aligned}S_n &= n(a_1 + a_n)/2 \\S_{10} &= 10(2 + 20)/2 = 110\end{aligned}$$

Javob: 110

3-misol

Geometrik progressiyada $b_1 = 2, q = 3$ bo'lsa, b_4 ni toping.

Yechish:

$$\begin{aligned}b_n &= b_1 \cdot q^{n-1} \\b_4 &= 2 \cdot 3^3 = 54\end{aligned}$$

Javob: 54

4-misol

Geometrik progressiyada $b_1 = 16, q = 1/2$ bo'lsa, b_5 ni toping.

Yechish:

$$b_5 = 16 \cdot (1/2)^4 = 16/16 = 1$$

Javob: 1

5-misol

Agar a, b, c arifmetik progressiya bo'lsa va $a = 4, c = 10$ bo'lsa, b ni toping.

Yechish:

$$b = (a + c)/2 = (4 + 10)/2 = 7$$

Javob: 7

2.5. O'rta darajadagi misollar (5 ta)

1-misol

Arifmetik progressiyada $a_3 = 7$ va $a_8 = 22$ bo'lsa, a_1 va d ni toping.

Yechish:

$$a_3 = a_1 + 2d = 7$$

$$a_8 = a_1 + 7d = 22$$

Ayiramiz:

$$5d = 15 \rightarrow d = 3$$

$$a_1 = 7 - 2 \cdot 3 = 1$$

Javob: $a_1 = 1, d = 3$

2-misol

Arifmetik progressiyaning dastlabki 15 hadlari yig'indisi 450 ga teng. Agar $a_1 = 10$ bo'lsa, d ni toping.

Yechish:

$$S_n = n(2a_1 + (n - 1)d)/2$$

$$450 = 15(20 + 14d)/2$$

$$450 = 15(10 + 7d)$$

$$30 = 10 + 7d$$

$$7d = 20$$

$$d = 20/7$$

Javob: $d = 20/7$

3-misol

Geometrik progressiyada $b_2 = 6$ va $b_5 = 162$ bo'lsa, b_1 va q ni toping.

Yechish:

$$b_2 = b_1 \cdot q$$

$$b_5 = b_1 \cdot q^4$$

Bo'lamiz:

$$b_5/b_2 = q^3 = 162/6 = 27$$

$$q = 3$$

$$b_1 = 6/3 = 2$$

Javob: $b_1 = 2, q = 3$

4-misol

Geometrik progressiyaning dastlabki 6 hadlari yig'indisi 126 ga teng, $b_1 = 2$. q ni toping ($q \neq 1$).

Yechish:

$$S_6 = b_1(q^6 - 1)/(q - 1)$$

$$126 = 2(q^6 - 1)/(q - 1)$$

$$63 = (q^6 - 1)/(q - 1)$$

Ma'lumki:

$$(q^6 - 1)/(q - 1) = q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$$

Shundan:

$$q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 = 63$$

$q = 2$ mos keladi.

Javob: $q = 2$

5-misol

Agar a, b, c geometrik progressiya bo'lib, $a + b + c = 14$ va $b = 4$ bo'lsa, a va c ni toping.

Yechish:

$$b^2 = a \cdot c \rightarrow 16 = a \cdot c$$

$$a + 4 + c = 14 \rightarrow a + c = 10$$

a va c — $x^2 - 10x + 16 = 0$ tenglamaning ildizlari:

$x = 2$ va $x = 8$

Javob: $a = 2, c = 8$