

1. Matematika olimpiadasida logarifmik tenglama va tengsizliklar

1.1. Logarifm tushunchasi va aniqlanish sohasi

Logarifm quyidagicha aniqlanadi:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b,$$

bu yerda **asos** a va **argument** b quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$\text{☞ } a > 0, a \neq 1$$

$$\text{☞ } b > 0$$

Eng muhim qoida: logarifmik masalalarda **birinchi qadam — aniqlanish sohasini (AS) yozish**. AS e'tibordan chetda qolsa, olimpiada darajasida bu **asosiy xato** hisoblanadi.

1.2. Logarifmning asosiy xossalari

AS shartlari bajarilganda quyidagi xossalar amal qiladi:

$$\text{☞ } \log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\text{☞ } \log_a(b/c) = \log_a b - \log_a c$$

$$\text{☞ } \log_a(b^n) = n \cdot \log_a b$$

$$\text{☞ } \log_a a = 1$$

$$\text{☞ } \log_a 1 = 0$$

$$\text{☞ } \log_a b = \log b / \log a \text{ (asosni almashtirish formulasi)}$$

Bu xossalar tenglama va tengsizliklarni soddalashtirishda ishlatiladi, lekin **AS tekshiruvdan keyin**.

1.3. Logarifmik tenglamalar turlari

Olimpiadalarda uchraydigan asosiy ko'rinishlar:

$$1. \log_a f(x) = c$$

$$2. \log_a f(x) = \log_a g(x)$$

$$3. \log f(x) + \log g(x) = c$$

$$4. \log_a f(x) = \log_b g(x)$$

$$5. \text{Aralash ko'rinishlar (logarifm + algebraik hadlar)}$$

Har bir tur uchun **o'ziga xos strategiya** mavjud, ammo **AS doimo umumiy asos** bo'lib qoladi.

1.4. Logarifmik tenglamalarni yechish strategiyasi

1) Aniqlanish sohasini yozish

Masalan, $\log_a f(x)$ mavjud bo'lishi uchun:
 $f(x) > 0$.

Bir nechta logarifm bo'lsa, **barcha argumentlar > 0** bo'lishi shart.

2) Asoslarni tenglashtirish

Agar:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x),$$

u holda (AS da):

$$f(x) = g(x).$$

3) Logarifmdan darajaga o'tish

Agar:

$$\log_a f(x) = c,$$

u holda:

$$f(x) = a^c.$$

4) Almashtirish va soddalashtirish

Ko'p hollarda ifodani ko'paytma yoki kasr ko'rinishiga keltirib, logarifm xossalaridan foydalanish qulay bo'ladi.

1.5. Logarifmik tengsizliklar

Logarifmik tengsizliklar quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$$

$$\log_a f(x) \leq c$$

$$\log_a f(x) \geq 0$$

Bu yerda **asosning qiymati** hal qiluvchi rol o'ynaydi.

1.6. Logarifmik tengsizliklarni yechish prinsiplari

Agar $a > 1$ bo'lsa:

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$$

Agar $0 < a < 1$ bo'lsa:

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$$

☞ **Muhim:** $0 < a < 1$ bo'lganda tengsizlik belgisi **teskari o'zgaradi**. Bu — olimpiadalarda eng ko'p tekshiriladigan nuqta.

1.7. “Barcha x lar uchun” va “kamida bitta yechim” tipidagi masalalar

Logarifmik masalalarda tez-tez quyidagi talablar qo'yiladi:

- 📖 tenglama kamida bitta yechimga ega bo'lsin;
- 📖 tenglama aniq bitta yechimga ega bo'lsin;
- 📖 tengsizlik barcha x lar uchun bajarilsin.

Bunday hollarda:

- 📖 AS mavjudligi,
- 📖 funksiya monotonligi,
- 📖 grafik kesishishlar soni

birgalikda tahlil qilinadi.

1.8. Tipik xatolar (nazariy ogohlantirish)

- 📖 AS yozmasdan tenglamani yechish;
- 📖 $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ da $f(x) = g(x)$ ni ASSiz qabul qilish;
- 📖 $0 < a < 1$ holatda tengsizlik belgisini o'zgartirmaslik;
- 📖 logarifm xossalarini noto'g'ri qo'llash;
- 📖 topilgan ildizlarni AS bilan tekshirmaslik.

Xulosa

Logarifmik tenglama va tengsizliklar olimpiada algebra bo'limining eng **mantiqiy va ehtiyotkorlik talab qiladigan** mavzularidan biridir. Bu mavzuda muvaffaqiyat kaliti — **aniqlanish sohasini birinchi o'ringa qo'yish**, asosning qiymatini to'g'ri

2. Metodik yordam

(Logarifmik tenglama va tengsizliklarni olimpiadaga yo'naltirib o'qitish)

2.1. O'qitishda asosiy tamoyil

Logarifmik masalalarda **eng muhim qadam — aniqlanish sohasi (AS)**. O'quvchiga quyidagi tartib qat'iy singdiriladi:

1. **AS yoziladi** (argument > 0 , asos shartlari);
2. **tenglama/tengsizlik soddalashtiriladi**;
3. **asosning qiymati** ($a > 1$ yoki $0 < a < 1$) tekshiriladi;
4. **algebraik yechim** olinadi;

5. AS bilan tekshiruv qilinadi.

Bu tartib buzilsa, natija noto'g'ri chiqishi ehtimoli yuqori.

2.2. Asosiy metodlar (o'qituvchi uchun tayanch)

📖 **Asoslarni tenglashtirish:**

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) \text{ (AS da).}$$

📖 **Darajaga o'tish:**

$$\log_a f(x) = c \Rightarrow f(x) = a^c.$$

📖 **Xossalar orqali birlashtirish:**

$$\log_a(b \cdot c), \log_a(b/c), \log_a(b^n).$$

📖 **Monotonlik:**

$a > 1$ yoki $0 < a < 1$ holatiga qarab tengsizlik belgisi.

📖 **Grafik fikrlash:**

$\log_a f(x)$ va doimiy chiziqlar kesishishi.

2.3. Tipik xatolar (metodik ogohlantirish)

📖 AS ni yozmasdan yechish;

📖 $0 < a < 1$ holatda tengsizlik belgisi teskari ekanini unutish;

📖 $\log_a(b + c) = \log_a b + \log_a c$ deb noto'g'ri yozish;

📖 topilgan ildizlarni AS bilan tekshirmaslik;

📖 $a = 1$ holatini e'tibordan chetda qoldirish.

2.4. Oddiy darajadagi misollar (5 ta)

1-misol

Tenglamani yeching:

$$\log_2 x = 3$$

AS: $x > 0$.

Yechish:

$$x = 2^3 = 8.$$

Javob: $x = 8$

2-misol

Tenglamani yeching:

$$\log_3(x - 1) = 0$$

AS: $x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$.

Yechish:

$$x - 1 = 1 \rightarrow x = 2.$$

Javob: $x = 2$

3-misol

Tenglamani yeching:

$$\log_5 1 = x$$

Yechish:

$$\log_5 1 = 0.$$

Javob: $x = 0$

4-misol

Tengsizlikni yeching:

$$\log_2 x \geq 0$$

AS: $x > 0.$

Yechish:

$2 > 1$, demak: $x \geq 1.$

Javob: $x \geq 1$

5-misol

Tengsizlikni yeching:

$$\log_{1/2} x \leq 0$$

AS: $x > 0.$

Yechish:

$0 < 1/2 < 1$, funksiya kamayuvchi.

$$x \geq 1.$$

Javob: $x \geq 1$

2.5. O'rta darajadagi misollar (5 ta)

1-misol

Tenglamani yeching:

$$\log_2(x + 1) = \log_2(3x - 1)$$

AS: $x + 1 > 0, 3x - 1 > 0 \rightarrow x > 1/3.$

Yechish:

$$\begin{aligned}x + 1 &= 3x - 1 \\2 &= 2x \\x &= 1.\end{aligned}$$

Javob: $x = 1$

2-misol

Tenglamani yeching:

$$\log_3 x + \log_3(x - 2) = 1$$

AS: $x > 2.$

Yechish:

$$\begin{aligned}\log_3[x(x - 2)] &= 1 \\x(x - 2) &= 3 \\x^2 - 2x - 3 &= 0 \\(x - 3)(x + 1) &= 0\end{aligned}$$

$x = 3$ (AS ga mos).

Javob: $x = 3$

3-misol

Tengsizlikni yeching:

$$\log_4(x - 1) \geq \log_4 3$$

AS: $x - 1 > 0 \rightarrow x > 1.$

Yechish:

$4 > 1$, demak: $x - 1 \geq 3$

$$x \geq 4.$$

Javob: $x \geq 4$

4-misol

Tengsizlikni yeching:

$$\log_{1/3}(x + 2) < 1$$

AS: $x + 2 > 0 \rightarrow x > -2.$

Yechish:

$0 < 1/3 < 1$, tengsizlik belgisi teskari:

$$\begin{aligned}x + 2 &> (1/3)^1 = 1/3 \\x &> -5/3.\end{aligned}$$

Javob: $x > -5/3$

5-misol

Tenglamani yeching:

$$\log_2 x = \log_4(x + 2)$$

AS: $x > 0$.

Yechish:

$$\begin{aligned}\log_4(x + 2) &= (1/2) \cdot \log_2(x + 2) \\ \log_2 x &= (1/2) \cdot \log_2(x + 2)\end{aligned}$$

$$2 \cdot \log_2 x = \log_2(x + 2)$$

$$\log_2(x^2) = \log_2(x + 2)$$

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

$x = 2$ (AS ga mos).

Javob: $x = 2$