

Tengsizliklar haqida umumiy tushuncha

Tengsizlik nima?

Tengsizlik — ikki miqdorning o‘zaro solishtirilishi:

$$a > b, a < b, a \geq b, a \leq b$$

Bu solishtirish orqali miqdorlarning chegarasi, minimumi, maksimumi aniqlanadi.

Olimpiada masalalarida tengsizliklar ko‘pincha optimal taqsimot, simmetrik ifodalar yoki chegaralash usullarida ishlatiladi.

Tengsizliklarning asosiy turlari

Matematika olimpiadasida muhim turlar:

Algebraik tengsizliklar

Funksional tengsizliklar

Geometrik tengsizliklar

Ko‘p o‘zgaruvchili simmetrik tengsizliklar

Tengsizlikni isbotlashning ma’nosi

Isbot — ifoda barcha ruxsat etilgan qiymatlar uchun to‘g‘ri ekanini ko‘rsatish:

Olimpiadada isbot quyidagilardan iborat bo‘ladi:

1. Ifodani soddalashtirish
2. Mos metodni tanlash
3. Tenglik holatini topish
4. Xulosalash

Tengsizliklar ustida ishlashning asosiy qoidalari

Qo‘shish: $a > b \rightarrow a + c > b + c$

Musbat songa ko‘paytirish: $a > b \rightarrow ac > bc$

Manfiy songa ko‘paytirish: $a > b \rightarrow -a < -b$

Monoton funksiyalar: Agar f o‘svuchi bo‘lsa: $a > b \rightarrow f(a) > f(b)$

Bu qoidalar — olimpiada tengsizliklarining poydevori hisoblanadi

Tengsizliklar 9–11 sinf olimpiadalarining 30–40% qismini tashkil qiladi.

Simmetrik ifodalar, minimal qiymatlar, optimallashtirish masalalarida asosiy rol o‘ynaydi

Shuning uchun o‘qituvchilar uchun tengsizliklar bo‘yicha mustahkam metodik tayyorgarlik zarur.

O‘RTA ARIFMETIK VA O‘RTA GEOMETRIK

Musbat sonlar uchun quyidagi tengsizlik doimo bajariladi:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

Bu yerda chap tomonda — o'rta **arifmetik**, o'ng tomonda — o'rta **geometrik**.

Tenglik faqat va faqat $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ bo'lganda bajariladi.

Endi oddiy isbot keltiramiz: 2 ta musbat son uchun, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Isbot: $(a - b)^2 \geq 0 \rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$

Bundan $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Bu eng oddiy va eng ko'p ishlatiladigan ko'rinishi.

O'rta arifmetik va o'rta geometrik ifodalar olimpiada misol va masalalarida quyidagi jihatlarida yordam beradi.

Ifodani minimallashtirish

Simmetrik ifodalarni soddalashtirish

Katta ifodalarni bo'laklash

O'rta arifmetik va o'rta geometrik ifodalarni qo'llash bo'yicha metodik tavsiyalar (o'qituvchilar uchun)

Musbatlik sharti — eng muhim qism

O'rta arifmetik va o'rta geometrik **faqat musbat sonlar** uchun ishlaydi.

Bu o'quvchilarning eng ko'p adashadigan joyi.

O'quvchilarga avval 2 ta son uchun o'rgatish. Shundan keyin 3, 4 va umumiy n ta son holatiga o'tish eng oson.

Ifodani qanday bo'laklashni o'rgatish. Ko'p masalalarda asosiy qiyinchilik:

“qaysi elementlarni bir guruhga ajratish kerak?”

Buning uchun:

tengsizlikdagi simmetriyani aniqlash

o'xshash darajalarni birlashtirish

bir xil xossalarga ega bo'lgan elementlarni yonma-yon qo'yish

Tenglik holatini topish

Bu — olimpiada masalasini to'liq tushunganlik belgisi.

O'rta arifmetik va o'rta geometrik ni kombinatsiya qilish

Ko'pincha Koshi yoki Yensen bilan birga qo'llash.

KOSHI–BUNYAKOVSKIY–SHVARTS TENGSIZLIG

Tengsizlikning asosiy ko'rinishi

O'zgarmas ravishda qo'llanadigan asosiy formula:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

Bu matematikada eng fundamental tengsizliklardan biri bo'lib, vektorlar orasidagi burchak haqidagi faktga asoslanadi.

Olimpiadalarda eng ko'p ishlatiladigan ko'rinishi quyidagicha:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i} \geq \frac{(\sum x_i)^2}{\sum a_i}$$

Bu formula olimpiada masalalarida eng “tez yechimga olib boruvchi” ko'rinish.

Bu tengsizlik olimpiadada quyidagi jihatlarda yordam beradi.

Ifodalarni **kvadratlariga ajratish** imkonini beradi.

Murakkab suratlarga ega kasrlarni **tenglashtirish** imkonini yaratadi.

Ko'p o'zgaruvchili tengsizliklarda **simmetriyani topishni** osonlashtiradi.

Minimum, maksimum qiymatni topish bo'yicha yahshi vosita.

Oddiy holatda:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

Bu ko'p masalalarda chap tomonni “ochmasdan” yuqoridan baholash uchun ishlatiladi.

Kasrlar bilan ishlash:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$$

Ko'p ishlatiladigan "eng qulay" variant.

Uch o'zgaruvchili misollar:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Bu — olimpiada masalalarida eng keng tarqalgan shakli.

Ko'phadlarni baholash:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

Minimumni toppish:

Misol: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ni quyidagicha baholash mumkin.

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x+y) \geq (1+1)^2 = 4$$

Natija: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

Metodik tavsiyalar:

Uch xil ko'rinishni o'rgatish

O'quvchi:

klassik

kasrli

yig'indi-kvadratli

ko'rinishlarda ishlatishni bilishi shart.

"Qaysi ko'rinish ishlaydi?" savoli — kalit nuqta

Darsda o'quvchiga har safar shu savolni berish kerak:

"Bu ifodaga qaysi shakli mos keladi?"

Bu metodik sezgirlikni kuchaytiradi.

Tenglik holatini topish

Ko'p o'quvchilar bu qismni o'tkazib yuboradi.

Aslida tengsizlikni to'g'ri qo'llangan yoki yo'qligi aynan tenglikdan bilib olinadi.

Asosiy yondashuv: "kvadratlash"

Murakkab masala ko'rinsa — avvalo kvadratlash imkoniyatini tekshirish kerak.

YENSEN TENGSIZLIGI

Agar funksiya **konveks** bo'lsa (ya'ni grafik pastga egilgan bo'lsa), unda quyidagi tengsizlik doimo bajariladi:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$$

Agar funksiya **konkav** bo'lsa (grafik tepaga egilgan) — ishora teskariga aylanadi.

Konvekslik sharti:

$$f''(x) \geq 0$$

Konkavlik sharti:

$$f''(x) \leq 0$$

Tenglik **hamma argumentlar teng bo'lganda** ro'y beradi.

Yensen tengsizligi quyidagi holatlarda yordam beradi.

Logaritm, eksponenta, darajalar, sin, cos kabi funksiyalarni tahlil qilishda juda qudratli.

Og'ir ko'rindigan simmetrik tengsizliklarni bitta qadamda isbotlab qo'yadi.

Minimum/maksimum topish uchun eng samarali metodlardan biri.

IMO darajasidagi eng murakkab tengsizliklarda keng qo'llanadi.

Olimpiadada juda ko'p ishlatiladigan funksiyalar

Funksiya	Xossasi	Izoh
$f(x) = x^2$	konveks	eng sodda misol
$f(x) = e^x$	konveks	eksponentalar bilan ishlashda
$f(x) = \ln x$	konkav	logaritmik baholashlarda
$f(x) = x \ln x$	konveks	entropiya tipidagi masalalar
$f(x) = 1/x$	konveks ($x > 0$)	kasrlarni baholashda

O'qituvchi aynan shu 5 funksiyaga alohida urg'u berishi kerak.

Eng sodda misol

Konveks funksiya: $f(x) = x^2$

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq \frac{x^2+y^2}{2}$$

Qiyinroq misollar

Exponenta orqali

$$e^x + e^y \geq 2e^{\frac{x+y}{2}}$$

Bu funksional tengsizliklarni baholashda asosiy formula.

Logarifmik misol:

Agar $x, y, z > 0$ bo'lsa:

$$\ln x + \ln y + \ln z \leq 3 \ln \left(\frac{x+y+z}{3} \right)$$

Bu logarifmning konkavligi natijasi.

Kasr qatnashgan misol:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$

Bu ham $f(x) = \frac{1}{x}$ konveksligi orqali Jensen bilan oson isbotlanadi.

Metodik tavsiya

O'qituvchi o'quvchiga quyidagi "signallarni" o'rgatishi kerak:

Ifoda **funksiya** ko'rinishida bo'lsa

O'zgaruvchilar $\frac{x+y+z}{3}$ tipida balanslashga moyil bo'lsa

Tenglik holati $x = y = z$ bo'lib chiqsa

Masala logarifm, eksponenta, $\frac{1}{x}$, x^p kabi funksiyalarni o'z ichiga olsa

— bu deyarli har doim Yensenni qo'llash kerakligini bildiradi.

Funksiya xossalarini avval o'rgatish

Yensen o'z-o'zidan emas, balki funksiya xatti-harakatiga tayanadi.

Grafik orqali tushuntirish

Konveks funksiya grafigidagi urinma chizig'i har doim grafikdan pastda bo'ladi — o'quvchi uchun eng tushunarli izoh.

Tenglik holatini aniqlash — asosiy mezon

Tengsizlikni to'g'ri qo'llanganini tekshirishning eng oson yo'li.

REARRANGEMENT(QO'SH TENGSIZLIK) TENGSIZLIGI

Agar ikkita ketma-ketlik bir xil tartibda joylashtirilgan bo'lsa (ikkalasi ham o'suvchi yoki kamayuvchi), unda ular o'zaro ko'paytirilganda **maksimal** qiymat hosil qiladi.

Agar biri o'suvchi, ikkinchisi kamayuvchi bo'lsa — ko'paytma **minimal** bo'ladi.

Agar:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$$

va

$$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$$

bo'lsa, u holda:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \text{ maksimal}$$

Teskari — (birini teskari tartibda olish) minimalni beradi:

$$a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1$$

Bu tengsizlik yordamida nimalarga erishish mumkin.

Ko'p o'zgaruvchili ifodalarda **eng yaxshi joylashuvni** topishda yordam beradi.

“qaysi ifodalarni birlashtirsak foydaliroq?” degan masalalarda hal qiluvchi rol o'ynaydi.

Geometriya, kombinatorika va algebra kesishgan masalalarda tez yechim beradi.

Minimum, maksimum topishda foydali.

Oddiy misol

$$a \leq b, c \leq d$$

Maksimal qiymat:

$$ac + bd$$

Minimal qiymat:

$$ad + bc$$

Bu holatni ko‘p o‘qituvchilar tushuntirmaydi, lekin o‘quvchi uchun juda muhim.

Olimpiadada eng ko‘p qo‘llaniladigan shakli

3 ta son uchun

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3, \quad b_1 \leq b_2 \leq b_3$$

Maksimal:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Minimal:

$$a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1$$

Amaliy qo‘llanilishi

“Eng yaxshi taqsimot” masalalari

Masalan:

eng kichik son eng kichik son bilan juftlanadi

eng katta son eng katta son bilan juftlanadi

Bu har doim maksimalni beradi.

Yig‘indining pastki chegarasini topish

Ko‘p olimpiada masalalari:

“bu ifoda minimal bo‘la oladimi?”

— degan savol bilan boshlanadi.

Javob ko‘pincha Rearrangement orqali olinadi.

Metodik tavsiyalar

Kichik ketma-ketliklarda ko‘p mashq qilish

2, 3, 4 ta son bilan mashqlar — konsepsiyani tez o‘rgatadi.

“Tartib” tushunchasiga alohida urg‘u

Ketma-ketliklar qaysi tartibda berilganini tushunish — tengsizlikni to‘g‘ri qo‘llashning yarimi.

O‘quvchiga misolni qayta tartiblash kerakligini aytish

Ko‘p olimpiada masalalari aynan shu qadamda yechila boshlaydi.

Tenglik holatini topish

O‘quvchi bilishi kerak:
maksimal → bir xil tartib
minimal → teskari tartib

Olimpiadadagi ahamiyati

Rearrangement tengsizligi ayniqsa quyidagi masalalarda juda samarali:

Minimum, maksimum topish

taqsimot masalalari

kombinatorika bilan bog‘liq tengsizliklar

turli darajali elementlarni juftlash

Ko‘p o‘qituvchilar bu tengsizlikni unchalik ko‘p qo‘llamasa ham, yuqori darajadagi olimpiada masalalarida **hal qiluvchi vosita** bo‘lib xizmat qiladi.

SHUR TENGSIZLIGI

Shur tengsizligining umumiy ko‘rinishi

Har qanday **musbat** a, b, c sonlar uchun hamisha quyidagi tengsizlik bajariladi:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)$$

Bu — **Shur tengsizligining 3-darajali** ko‘rinishi bo‘lib, olimpiadada eng ko‘p qo‘llaniladi.

Tenglik qachon bajariladi?

Faqat:

$$a = b = c$$

Shur tengsizligi mazmuni

Shur tengsizligi **asimmetriyani** (ya'ni a, b, c lar teng emasligini) o'lchaydi.

Bu tengsizlik ko'p hollarda o'rta arifmetik va o'rta geometrik yoki Koshi ishlamaydigan joyda ishlaydi.

Shur odatda quyidagi vaziyatlarda qo'llanadi:

$ab(a + b), bc(b + c)$ kabi simmetrik bo'lmagan ifodalar

kuchli tengsizliklar

$a + b + c, ab + bc + ca, abc$ o'zaro bog'lanadigan masalalar

$a^3, ab(a + b)$ darajalar aralashgan murakkab tengsizliklar

Eng sodda ko'rinishi

$$a(a - b)(a - c) + b(b - c)(b - a) + c(c - a)(c - b) \geq 0$$

Bu shakl ko'p o'qituvchilar tomonidan kam ishlatiladi, lekin u juda foydali:

- a, b, c larni taqqoslashda
- tartiblashda
- simmetriya tahlilida

Olimpiadadagi qo'llanilishi

Uch o'zgaruvchili kuchli tengsizliklar

Masalan:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a).$$

Bu ko'plab masalalarni "ochish" uchun asosiy qadam.

Ifodani soddalashtirib $ab + bc + ca$ ni baholash

Ko'p masalalarda:

- $a^3 + b^3 + c^3$ dan
- $ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)$

kelib chiqishi kerak bo'ladi.

Minimum topish

Shur orqali ko‘pincha murakkab ifodalarning eng past qiymati topiladi.

Metodik tavsiyalar (o‘qituvchilar uchun)

Avval 3-darajali Shur bilan boshlash

Bu eng universal ko‘rinish.

O‘quvchiga qachon “Shur tengsizligi”ni ishlatish kerakligini o‘rgatish

Agar masalada:

a^3 , $ab(a + b)$, abc birgalikda uchrasa

O‘rta arifmetik va o‘rta geometrik bilan tenglashtirib bo‘lmasa

yoki $a = b = c$ holatida tenglik kelsa

→ bu Shur uchun “signal”.

Tenglik holatini doim tekshirtirish

Shur qo‘llanganda deyarli har doim tenglik $a = b = c$ bo‘ladi.

Shurni o‘rta arifmetik-o‘rta geometrik bilan kombinatsiya qilish

Ko‘p masalalarda:

avval Shur

keyin o‘rta arifmetik-o‘rta geometrik yoki teskarisi ishlaydi.

Olimpiadadagi ahamiyati

Shur — tengsizliklar bo‘limida eng **kuchli qurollardan biri**.

U:

yuqori darajadagi tengsizliklarda

uch o‘zgaruvchili murakkab systemalarda

simmetrik tengsizliklarda

deyarli har doim ishlaydi.

IMO va Respublika olimpiadalarining ko‘plab yechimlarida aynan Shur asosiy rol ni bajaradi.

FUNKSIONAL TENGSIKLIKLAR

Funksional tengsizlik nima?

Agar tengsizlikda oddiy sonlar emas, **funksiya** ishtirok etsa, u **funksional tengsizlik** deyiladi.

Masalan:

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y)$$

yoki

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Bu tengsizliklar **funksiyaning xatti-harakati** (o‘sishi, kamayishi, qavariqligi, 1-xossasi va hokazo) haqida ma’lumot beradi.

Funksional tengsizliklarning ahamiyati

Olimpiadalarda funksional tengsizliklar:

Minimallashtirish, maksimallashtirish

funksiya xossalarini aniqlash

konveks/konkav (qavariq/botiq) funksiyalarni tahlil qilish

kombinatorika bilan bog‘langan tengsizliklar

logarifm va eksponentialarga asoslangan masalalar

uchun eng muhim vosita hisoblanadi.

Odatda Koshi, Yensen aynan funksional tengsizliklar tarkibida ishlatiladi.

Funksional tengsizliklarning asosiy turlari

Monotonlikka asoslangan tengsizliklar

Agar $f(x)$ o'suvchi bo'lsa:

$$a > b \Rightarrow f(a) > f(b)$$

Agar kamayuvchi bo'lsa:

$$a > b \Rightarrow f(a) < f(b)$$

Bu olimpiadadagi eng sodda, lekin eng tez ishlaydigan usul.

Qavariq va botiqlikka asoslanganlar

Yensen tengsizligi asosida:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

yoki konkav bo'lsa teskarisi.

Bu sinf — funksional tengsizliklarning eng katta va eng kuchli qismi.

Subadditiv va superadditiv tengsizliklar

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y) \text{ (subadditiv)}$$

$$f(x+y) \geq f(x) + f(y) \text{ (superadditiv)}$$

Ko'pincha kombinatorika va optimallashtirish masalalarida uchraydi.

Gomogen funksiyalar bilan tengsizliklar

Agar $f(tx) = t^k f(x)$ bo'lsa (darajali funksiya):

$$f(ax + by) \leq a^k f(x) + b^k f(y)$$

Bu ko'p o'zgaruvchili funksional tengsizliklarda yahshi vosita.

Funksiyaning cheklanganligi bilan bog'liq tengsizliklar

Masalan:

$$|f(x)| \leq M$$

yoki

$$f(x) \geq c$$

bu holatlar funksiya qiymatlari orasidagi nisbatlarni baholashda qo'llaniladi.

Funksional tengsizliklarni isbotlashning asosiy usullari

Monotonlik orqali baholash

Agar funksiya o'suvchi bo'lsa $\rightarrow$ argumentni kattalashtirish faqat foyda beradi.

Konvekslik orqali, Yensen

Bu ko'pincha eng kuchli va eng chiroyli yechim.

Koshi orqali funksiya yig'indisini baholash

Ko'p sonli argumentlar bilan ishlaganda foydali.

Funksiyani mustaqil qismlarga ajratish

Masalan:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) - g(x, y)$$

kabi taqsimot.

Maximum/minimum tekshirish

Agar funksiya chegaralangan bo'lsa, ya'ni:

$$f(x) \geq k$$

bo'lsa — ko'p tengsizliklar darhol chiqadi.

Metodik tavsiyalar (o'qituvchilar uchun)

Avval eng sodda funksiyalar bilan boshlash

$\ln x, e^x, \frac{1}{x}$ — o'quvchi uchun eng qulay.

Funksiya xossasini har doim grafik bilan tushuntirish

Bu murakkab funksional tengsizliklar uchun asosiy tayanch bo'ladi.

Tenglik holatini topish

Funksional tengsizliklarda tenglik odatda:

argumentlar teng bo'lganda

yoki urinma nuqtasida ro'y beradi.

O'quvchi "qaysi xossa kerak?"ni aniqlay olishi kerak

Olimpiadada juda muhim malaka.

Olimpiadadagi ahamiyati

Funksional tengsizliklar:

yuqori darajadagi olimpiadalarning 3–4-masalarida

logarifm/eksponenta ifodalarida

optimallashtirishda

konveks analizga asoslangan masalalarda asosiy rolni o'ynaydi.

Bu bo'limni yaxshi bilgan o'quvchi tengsizliklar blokining 70–80%ini osongina yecha oladi.

Masala:

$a, b, c > 0$ bo'lsin. Isbotlang:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Yechim

1-bosqich. Har bir hadni Titu–Cauchy usuliga mos ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c} &= \frac{a^2}{a(b+c)} \\ \frac{b}{c+a} &= \frac{b^2}{b(c+a)} \\ \frac{c}{a+b} &= \frac{c^2}{c(a+b)}\end{aligned}$$

Demak,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a^2}{a(b+c)} + \frac{b^2}{b(c+a)} + \frac{c^2}{c(a+b)}$$

Endi Titu–Cauchy tengsizligini qo‘llaymiz:

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \frac{x_3^2}{y_3} \geq \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2}{y_1 + y_2 + y_3}$$

Bu yerda:

$$\begin{aligned}x_1 &= a, & y_1 &= a(b + c) \\x_2 &= b, & y_2 &= b(c + a) \\x_3 &= c, & y_3 &= c(a + b)\end{aligned}$$

Shuning uchun:

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{(a + b + c)^2}{a(b + c) + b(c + a) + c(a + b)}$$

2-bosqich. Endi pastdagi yig‘indini soddalashtiramiz:

$$\begin{aligned}a(b + c) + b(c + a) + c(a + b) &= ab + ac + bc + ba + ca + cb \\&= 2(ab + bc + ca)\end{aligned}$$

Demak:

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{(a + b + c)^2}{[2(ab + bc + ca)]}$$

3-bosqich. Klassik tengsizlikni ishlatamiz:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

Ma’lumki:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

Shu sabab:

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\&\geq (ab + bc + ca) + 2(ab + bc + ca) \\&= 3(ab + bc + ca)\end{aligned}$$

Demak:

$$(a + b + c)^2/[2(ab + bc + ca)] \geq 3(ab + bc + ca)/[2(ab + bc + ca)] = 3/2$$

Natijada:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Yechim tugadi.