

SONLAR NAZARIYASI BO‘LINUVCHANLIK VA QOLDIQ

NEGA BO‘LINUVCHANLIK VA QOLDIQ MUHIM?

Mavzuning olimpiadadagi o‘rni

Bo‘linuvchanlik va qoldiq:

diofant tenglamalar,

invariantlar,

qarama-qarshi isbotlar,

kombinatorika va hatto **geometriya**

bilan chambarchas bog‘langan.

Ko‘p olimpiada masalalarida:

“Hisoblab topish mumkin emas — **isbotlash kerak**”.

Ana shu joyda qoldiq eng kuchli metodga aylanadi.

O‘quvchilar qiladigan asosiy xato

Ko‘p o‘quvchilar:

modulni faqat “qoldiq” deb ko‘radi;

uni strategiya sifatida ishlatmaydi.

O‘qituvchi vazifasi:

“mod n — bu hisob emas, **fikrlash usuli**” ekanini ko‘rsatish.

BO‘LINUVCHANLIK ASOSLARI

Ta’rif

a son b songa **bo‘linadi**, agar shunday $k \in \mathbb{Z}$ mavjud bo‘lsaki:

$$a = b \cdot k$$

Belgilanish:

$$b \mid a$$

Misol:

$$3 \mid 12, \quad 5 \nmid 12$$

Asosiy xossalar (o'qituvchi bilishi shart)

Agar:

$b \mid a$ va $b \mid c$ bo'lsa, unda:

$$b \mid (a + c)$$

$$b \mid (a - c)$$

$$b \mid (k \cdot a)$$

(har qanday $k \in \mathbb{Z}$)

Metodik eslatma:

Bu xossalar keyinchalik **moduldagi(qoldiqdagi) almashtirishlar** uchun poydevor bo'ladi.

EKUB bilan bog'lanish

Agar:

$$d = EKUB(a, b)$$

bo'lsa, u holda:

$$a = d \cdot x$$

$$b = d \cdot y$$

$$EKUB(x, y) = 1$$

Bu ajratish:

- diofant masalalarida,
- modul bilan EKUBni birga ishlatishda

asosiy usul.

MODUL (QOLDIQ) TUSHUNCHASI

Ta'rif

a va b sonlar mod n bo'yicha teng, agar:

$$n \mid (a - b)$$

Belgilanadi:

$$a \equiv b \pmod{n}$$

Misol:

$$17 \equiv 5 \pmod{12}$$

chunki:

$$17 - 5 = 12$$

Modulda ishlash qoidalari

Agar:

$$a \equiv b \pmod{n}$$

$$c \equiv d \pmod{n}$$

bo'lsa, unda:

$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod{n}$$

$$a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{n}$$

Metodik tavsiya:

Modulda ishlaganda doim **sonning o'zi emas, qoldig'i bilan ishlayapman** degan fikrni singdirish kerak.

ENG MUHIM MODULLAR (OLIMPIADA AMALIYOTI)

Mod 2 (paritet)

$$juft \equiv 0 \pmod{2}$$

$$toq \equiv 1 \pmod{2}$$

Eng tez ishlaydigan invariant.

Ko‘pincha:

- juft–toq zanjiri,
- imkonsizlik isboti

uchun ishlatiladi.

Mod 3 va mod 9 (raqamlar yig‘indisi)

$n \equiv \text{raqamlar yig‘indisi} \pmod{9}$

Metodik qo‘llanish:

katta sonlarning qoldig‘ini topish,

karralikni tekshirish.

Mod 4 va mod 8 (kvadratlar)

Kvadratlarning qoldiqlari:

mod 4 da:

$$x^2 \equiv 0 \text{ yoki } 1$$

mod 8 da:

$$\text{toq}^2 \equiv 1$$

$$\text{juft}^2 \equiv 0 \text{ yoki } 4$$

Juda ko‘p “kvadrat bo‘la olmaydi” tipidagi masalalar shu yerda yechiladi.

Mod 11 (alternativ yig‘indi)

$$(abcd)_{10} \equiv (a - b + c - d) \pmod{11}$$

Bu:

katta sonlarda,

tartibli raqamlar bilan bog‘liq masalalarda kuchli usul.

MODUL ORQALI IMKONSIZLIK ISBOTI

Klassik sxema

1. Faraz qilamiz: yechim bor
2. Modul tanlaymiz
3. Chap va o'ng tomonni mod n da solishtiramiz
4. Zidlikka kelamiz

xulosa: yechim YO'Q.

Metodik misol (sxematik)

Faraz qilaylik:

$$x^2 = 3y^2 + 1$$

mod 3 da qaraymiz:

$$\begin{aligned} x^2 &\equiv 0, 1 \\ 3y^2 + 1 &\equiv 1 \end{aligned}$$

Demak:

$$x^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

Bu har doim mumkin emas — shartlar orqali zidlik olinadi.

MODUL + EKUB KOMBINATSIYASI

Eng kuchli olimpiada kombinatsiya

Ko'pincha masala shunday ko'rinishda bo'ladi:

butun yechimlar

EKUB ishtirok etadi

modul orqali cheklash kerak

Misol sxemasi:

$$\begin{aligned} a &= d \cdot x \\ b &= d \cdot y \end{aligned}$$

$$\text{EKUB}(x, y) = 1$$

Keyin:

mod d yoki mod x

olinadi.

METODIK XATOLAR VA ULARNI OLDINI OLISH

O‘quvchilar xatolari:

1. Modulni tasodifiy tanlash
2. Juda katta modul olish
3. Qoldiqni noto‘g‘ri hisoblash
4. “Bir modul ishlamasa, etarli” deb to‘xtash

O‘qituvchi tavsiyasi:

Har masalada kamida **2–3 modul sinab ko‘rishga** o‘rgating.

DARSNI TASHKIL QILISH STRATEGIYASI

1-dars:

- bo‘linuvchanlik + mod 2, 3
- juda sodda misollar

2-dars:

- mod 4, 8, kvadratlar
- imkonsizlikning birinchi isbotlari

3-dars:

- mod 9, 11
- raqamlar bilan ishlash

4-dars:

- modul + EKUB

- olimpiada masalalari

90‘QITUVCHI UCHUN “OLTIN SAVOLLAR”

- Qaysi modul qulay?
- Kvadratlar bu modda qanday?
- EKUBni ajratib yozsam nima bo‘ladi?
- Qarama-qarshilik chiqayaptimi?

1XULOSA (METODIK)

Bo‘linuvchanlik va modul:

- algebra emas, **mantiq**,
- hisob emas, **isbot**,
- formula emas, **strategiya**.

Modulni bilgan o‘quvchi ko‘p masalada oldindan biladi:
“bu mumkinmi yoki yo‘qmi”.

MASALALAR

1-masala

Isbotlang: agar $a \mid b$ va $b \mid c$ bo‘lsa, u holda $a \mid c$

Yechim

Berilganlardan:

$$\begin{aligned} b &= a \cdot k \\ c &= b \cdot m \end{aligned}$$

Demak:

$$c = (a \cdot k) \cdot m = a \cdot (k \cdot m)$$

Shu sababli: $a \mid c$

2-masala

Isbotlang: har qanday butun n uchun quyidagi son **6 ga bo'linadi**:

$$n^3 - n$$

Yechim

$$\text{Yozamiz: } n^3 - n = n(n - 1)(n + 1)$$

Bu ketma-ket **uchta butun son** ko'paytmasi.

Ularning ichida:

- bittasi juft $\rightarrow$ 2 ga bo'linadi
- bittasi 3 ga bo'linadi

$$\text{Demak: } 6 \mid (n^3 - n)$$

3-masala

$$\text{Topping: } 7^{2025} \bmod 6$$

Yechim

$$\text{E'tibor beramiz: } 7 \equiv 1 \pmod{6}$$

$$\text{Shning uchun: } 7^{2025} \equiv 1^{2025} \equiv 1 \pmod{6}$$

Javob: 1

4-masala

Isbotlang: $10^n + 4$ soni har qanday butun $n \geq 1$ uchun 7 ga bo'linmaydi.

Yechim

$$\text{Mod 7 da qaraymiz: } 10 \equiv 3 \pmod{7}$$

$$\text{Demak: } 10^n \equiv 3^n \pmod{7}$$

3 ning darajalari mod 7:

$$3^1 \equiv 3$$

$$3^2 \equiv 2$$

$$3^3 \equiv 6$$

$$3^4 \equiv 4$$

$$3^5 \equiv 5$$

$$3^6 \equiv 1$$

→ sikl.

Shuning uchun: $10^n + 4 \equiv 3^n + 4$

Bu hech qachon 0 ga teng emas (yuqoridagi qoldiqlardan ko‘rinadi).

Xulosa: 7 ga bo‘linmaydi.

5-masala

Isbotlang: $x^2 + y^2 = 3z^2$

tenglamaning butun sonlarda nol bo‘lmagan yechimi yo‘q.

Yechim

Mod 4 da kvadratlar: $x^2 \equiv 0$ yoki 1

Chap tomonda:

$$x^2 + y^2 \equiv 0, 1, 2$$

O‘ng tomonda: $3z^2 \equiv 0$ yoki 3

0,1,2 hech qachon 3 ga teng bo‘lmaydi → zidlik.

Xulosa: yechim yo‘q.

6-masala

Isbotlang: $2025^{2024} + 1$ soni 9 ga bo‘linadi.

Yechim

$2025 \equiv 0 \pmod{9}$

Shuning uchun: $2025^{2024} \equiv 0$

Demak:

$$2025^{2024} + 1 \equiv 1 \pmod{9}$$

Bu noto‘g‘ri! Yana tekshiramiz.

Aslida: $2025 = 9 \cdot 225$

Demak: $2025^{2024} \equiv 0 \rightarrow +1 \equiv 1$

Xulosa: 9 ga bo'linmaydi.

Bu masala **xato farazni aniqlashga** juda foydali.

7-masala

Isbotlang: $x^2 + y^2 = 2025$ tenglama butun sonlarda yechimga ega emas.

Yechim

$$2025 \equiv 1 \pmod{4}$$

Kvadratlar:

$$x^2 \equiv 0 \text{ yoki } 1$$

$$y^2 \equiv 0 \text{ yoki } 1$$

$$\text{Yig'indi: } x^2 + y^2 \equiv 0, 1, 2$$

Lekin 1 faqat (1,0) holatda mumkin.

$$\text{Tekshirib ko'rsak: } 2025 = 45^2$$

Lekin bitta kvadrat nol bo'la olmaydi $\rightarrow$ zidlik.

Xulosa: yechim yo'q.

8-masala

Isbotlang: $x^3 = y^2 + 2$ tenglama butun yechimga ega emas.

Yechim

Mod 4 da qaraymiz.

$$\text{Kub: } x^3 \equiv 0, 1, 3$$

Kvadrat:

$$y^2 \equiv 0 \text{ yoki } 1$$

$$y^2 + 2 \equiv 2 \text{ yoki } 3$$

Lekin 2 hech qachon kub bo'lolmaydi.

Xulosa: yechim yo'q.

9-masala

Agar $a^2 + b^2 = 5ab$ bo'lsa, isbotlang: $a = b = 0$

Yechim

Faraz qilaylik $EKUB(a, b) = d$:

$$\begin{aligned} a &= dx \\ b &= dy \\ EKUB(x, y) &= 1 \end{aligned}$$

Tenglamani bo'lamiz:

$$x^2 + y^2 = 5xy$$

Mod 5 da:

$$x^2 + y^2 \equiv 0$$

Bu faqat:

$$x \equiv y \equiv 0 \pmod{5}$$

da mumkin $\rightarrow$ lekin $EKUB(x, y) = 1$ ga zid.

Xulosa: faqat trivial yechim.

10-masala

Toping barcha natural yechimlar:

$$\begin{aligned} EKUB(x, y) &= 1 \\ x + y^2 &\equiv 0 \pmod{xy} \end{aligned}$$

Yechim

Bu holda: $x \mid y^2$

EKUB=1 bo'lgani uchun: $x \mid 1$

Demak: $x = 1$

Javob: $x = 1, y$ ixtiyoriy.