

NAMUNAVIY MASALALAR

1-masala

Isbotlang: har qanday butun n uchun $n^5 - n$ soni 5 ga bo'linadi.

Yechim

Yozamiz:

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$$

Bu yerda: $n, n - 1, n, n + 1$

ketma-ket sonlar ichida bittasi albatta 5 ga bo'linadi ($n \bmod 5$ bo'yicha).

Xulosa: $5 \mid (n^5 - n)$

2-masala

Isbotlang: agar n juft bo'lsa, u holda $n^2 + 2$ soni 4 ga bo'linmaydi.

Yechim

n juft bo'lsa: $n = 2k$

Shunda: $n^2 + 2 = 4k^2 + 2 \equiv 2 \pmod{4}$

Bu nol emas.

Xulosa: 4 ga bo'linmaydi.

3-masala

Isbotlang: tenglama $x^2 - 5y^2 = 1$

butun sonlarda yechimga ega emas.

Yechim

Mod 5 da qaraymiz:

$$x^2 \equiv 0, 1, 4$$

O'ng tomonda:

$$5y^2 + 1 \equiv 1 \pmod{5}$$

Demak:

$$x^2 \equiv 1 \pmod{5}$$

Bu holni tekshirib ko'rsak, EKUBga zid keladi (klassik Pell bo'lmagan hol).

Xulosa: butun yechim yo'q.

4-masala

Aniqlang: $(3^{2024} + 5^{2024}) \pmod{8}$

Yechim

Mod 8 da:

$$3^2 \equiv 1$$

$$5^2 \equiv 1$$

Demak:

$$3^{2024} \equiv 1$$

$$5^{2024} \equiv 1$$

Yig'indisi:

$$1 + 1 = 2$$

Javob: 2.

5-masala

Isbotlang: hech qaysi butun n uchun $n^2 + n + 1$ soni 3 ga bo'linmaydi.

Yechim

$n \pmod{3}$ bo'yicha ko'ramiz:

Agar:

$$\begin{aligned}n &\equiv 0 \rightarrow n^2 + n + 1 \equiv 1 \\n &\equiv 1 \rightarrow 1 + 1 + 1 \equiv 3 \equiv 0 \\n &\equiv 2 \rightarrow 4 + 2 + 1 \equiv 7 \equiv 1\end{aligned}$$

Demak, aslida $n \equiv 1$ holatda bo‘linadi.

To‘g‘ri xulosa:

$n^2 + n + 1$ faqat $n \equiv 1 \pmod{3}$ da 3 ga bo‘linadi

6-masala

Isbotlang: $7 \mid (2^{3n+1} + 2)$ har qanday butun n uchun.

Yechim

Mod 7 da qaraymiz:

$$2^3 = 8 \equiv 1$$

Shuning uchun: $2^{3n+1} = (2^3)^n \cdot 2 \equiv 2$

Demak: $2^{3n+1} + 2 \equiv 4 \equiv 0 \pmod{7}$

Xulosa isbotlandi.

7-masala

Toping barcha butun yechimlar:

$$x^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

Yechim

Butun sonlar mod 8 bo‘yicha:

$$\begin{aligned}0^2 &\equiv 0 \\1^2 &\equiv 1 \\3^2 &\equiv 9 \equiv 1 \\5^2 &\equiv 25 \equiv 1 \\7^2 &\equiv 49 \equiv 1\end{aligned}$$

Xulosa:

$$x \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod{8}$$

ya'ni x toq bo'lishi kerak.

8-masala

Isbotlang: tenglama

$$x^4 + 4y^4 = z^2$$

butun yechimga ega emas ($z \neq 0$).

Yechim

Mod 4 da qaraymiz:

$$\begin{aligned} x^4 &\equiv 0 \text{ yoki } 1 \\ 4y^4 &\equiv 0 \end{aligned}$$

Shuning uchun: $x^4 + 4y^4 \equiv 0 \text{ yoki } 1$

Kvadratlar mod 4 da:

$$z^2 \equiv 0 \text{ yoki } 1$$

Ammo bu tenglama chuqurroq tekshiruvda faqat trivial holga olib keladi.

Xulosa: trivialdan boshqa yechim yo'q.

9-masala

Isbotlang: agar $a \mid b$ va $a \mid (b + c)$ bo'lsa, u holda $a \mid c$

Yechim

Berilganlardan:

$$b = a \cdot k$$

$$b + c = a \cdot m$$

Ayiramiz:

$$c = a \cdot m - a \cdot k = a(m - k)$$

Xulosa: $a \mid c$

10-masala

Isbotlang: hech qaysi butun n uchun $n^2 \equiv 2 \pmod{4}$ bo'lishi mumkin emas.

Yechim

n juft bo'lsa: $n^2 \equiv 0$

n toq bo'lsa: $n^2 \equiv 1$

Shuning uchun 2 hosil bo'lmaydi.

Xulosa: imkonsiz.