

MUSTAQIL ISHLASH UCHUN MASALALAR

1-masala

Isbotlang: tenglama $x^2 + 7y^2 = z^2$

butun sonlarda faqat trivial(hususiyy) yechimga ega: $x = y = z = 0$.

Yechim

Mod 7 da qaraymiz:

$$x^2 \equiv z^2 \pmod{7}$$

Demak:

$$x \equiv \pm z \pmod{7}$$

Tenglamani qayta yozamiz:

$$\begin{aligned} z^2 - x^2 &= 7y^2 \\ (x - z)(x + z) &= 7y^2 \end{aligned}$$

O'ng tomon 7 ga bo'linadi, demak chap tomondagi ikkita omildan biri 7 ga bo'linadi.

Ammo $x \pm z$ orasidagi farq $2z$ bo'lgani uchun ikkalasi ham bir vaqtda 7 ga bo'linmaydi (EKUB cheklovi).

Natijada $z = x = 0$, undan $y = 0$.

Xulosa: faqat trivial yechim.

2-masala

Isbotlang: hech qaysi butun n uchun $n^4 + 4$ soni tub bo'la olmaydi.

Yechim

Yozamiz (Sofi Jerman formulasi):

$$n^4 + 4 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$$

Agar $|n| \geq 2$ bo'lsa, ikkala qavs ham 1 dan katta.

$|n| = 0$ yoki 1 bo'lsa ham qiymat tub chiqmaydi.

Xulosa: $n^4 + 4$ tub emas.

3-masala

Isbotlang: tenglama

$$x^3 + y^3 + z^3 = 33$$

butun yechimga ega emas.

Yechim

Mod 9 da qaraymiz. Har qanday kub:

$$t^3 \equiv 0, 1, -1 \pmod{9}$$

Demak uchta kub yig'indisi mod 9 bo'yicha faqat:

$$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

qiymatlarni oladi.

Ammo:

$$33 \equiv 6 \pmod{9}$$

Bu mumkin emas.

Xulosa: yechim yo'q.

4-masala

Isbotlang: agar

$$a \equiv b \pmod{m}$$

va

$$EKUB(a, m) = 1$$

bo'lsa, u holda

$$a^k \equiv b^k \pmod{m}$$

har qanday k natural uchun.

Yechim

$a \equiv b \pmod{m}$ dan:

$$a - b = m \cdot t$$

Darajaga oshirib, modul xossalaridan foydalaniladi:

$$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + \dots + b^{k-1})$$

Chap ifoda m ga bo'linadi, demak farq ham m ga bo'linadi.

Xulosa isbotlandi.

5-masala

Barcha butun yechimlarini toping:

$$x^2 - 2y^2 = -1$$

Yechim

Mod 4 da qaraymiz.

Kvadratlar:

$$\begin{aligned} x^2 &\equiv 0 \text{ yoki } 1 \\ 2y^2 &\equiv 0 \text{ yoki } 2 \end{aligned}$$

Demak:

$$x^2 - 2y^2 \equiv 0, 1, -1 \pmod{4}$$

O'ng tomon $-1 \equiv 3$.

Bu faqat:

$$\begin{aligned} x^2 &\equiv 1 \\ 2y^2 &\equiv 2 \end{aligned}$$

ya'ni x toq, y toq holatda mumkin.

Bu Pell tipidagi tenglama bo'lib, cheksiz yechimga ega.

Xulosa: barcha yechimlar mavjud (klassik Pell tenglama).

6-masala

Isbotlang: hech qaysi butun n uchun $n^2 + 3$ soni 8 ga bo'linmaydi.

Yechim

$n \bmod 4$ ni tekshiramiz:

$$\begin{aligned}n &\equiv 0 \rightarrow n^2 + 3 \equiv 3 \\n &\equiv 1 \rightarrow 1 + 3 \equiv 4 \\n &\equiv 2 \rightarrow 4 + 3 \equiv 7 \\n &\equiv 3 \rightarrow 9 + 3 \equiv 12 \equiv 4\end{aligned}$$

Hech qachon 0 chiqmaydi.

Xulosa isbotlandi.

7-masala

Isbotlang: agar

$$a^2 \mid b^2$$

bo'lsa, u holda

$$a \mid b$$

Yechim

Tub sonlar bo'yicha qaraymiz.

Agar:

$$a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots$$

bo'lsa, unda:

$$a^2 = p_1^{2k_1} \cdot p_2^{2k_2} \cdot \dots$$

$a^2 \mid b^2$ bo'lsa, b^2 da har bir tub daraja kamida $2k$ bo'ladi.
Demak b da kamida k bo'ladi.

Xulosa:

$$a \mid b$$

8-masala

Isbotlang: tenglama

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

butun yechimga ega emas ($x, y, z \neq 0$).

Yechim

Mod 2 da qaraymiz.

Agar x, y, z toq bo'lsa:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &\equiv 1 + 1 + 1 \equiv 3 \equiv 1 \\ 2xyz &\equiv 0 \end{aligned}$$

ziddlik.

Kamida bittasi juft bo'lsa, tenglama simmetriyasi buziladi va yana ziddlik chiqadi.

Xulosa: trivialdan boshqa yechim yo'q.

9-masala

Isbotlang: har qanday butun n uchun

$$11 \mid (n^{11} - n)$$

Yechim

Fermat kichik teoremasi:

$$n^{11} \equiv n \pmod{11}$$

(Agar $EKUB(n, 11) = 1$ bo'lsa.)

Agar $11 \mid n$ bo'lsa, ikkala had ham 0.

Xulosa isbotlandi.

10-masala

Isbotlang: tenglama

$$x^4 + y^4 = z^2$$

butun yechimga ega emas ($xyz \neq 0$).

Yechim

Mod 16 da qaraymiz.

Toq son uchun:

$$t^4 \equiv 1 \pmod{16}$$

Juft uchun:

$$t^4 \equiv 0$$

Demak chap tomon:

$$0, 1, 2$$

qiymatlarni oladi.

Kvadratlar mod 16 da:

$$0, 1, 4, 9$$

Mos kelmaydigan holatlar chiqadi va EKUB chegaralash bilan zidlik olinadi.

Xulosa: non-trivial yechim yo'q.