

KOMBINATORIKA

Olimpiada uchun metodik tavsiya (o'qituvchilar uchun)

Kombinatorika nimaga kerak?

Kombinatorika — bu:

narsa va hodisalarni **sanash** (nechta?),

tanlash (necha xil usulda?),

joylashtirish (nechta tartibda?),

ba'zida esa “balki umuman bo'lmas?” degan savollarga javob beradigan bo'lim.

Olimpiadada kombinatorika:

formulani yod olish emas,

balki **mantiqiy tuzilmani ko'rish** san'ati.

O'quvchi ko'p hollarda:

“Bu yerda $P(n,k)$ ishlatamanmi yoki $C(n,k)$ mi?”

“Bu yerda Dirichletmi yoki oddiy hisobmi?”

degan joyda to'xtab qoladi.

O'qituvchi vazifasi —:

har bir masalada **qaysi fikrlash yo'lini ishlatish kerakligini** ko'rsatish.

Hisoblash asosiy printsiplari (summ va ko'paytma qoidasi)

Qo'shish qoidasi (yig'indilar printsiipi)

Ta'rif:

Agar ikki ish bor:

birinchi ishni amalga oshirishning a ta usuli bo'lsa,

ikkinchisini amalga oshirishning b ta usuli bo'lsa

va bu ikki ish **bir vaqtda bo‘lmaydigan, disjoint** bo‘lsa,

u holda:

“yoki birinchisi, yoki ikkinchisi” bo‘lishining umumiy usullari soni:

$$a + b$$

Misol:

sinfidagi o‘quvchilardan 5 tasi matematika to‘garagiga,

7 tasi fizika to‘garagiga qatnaydi,

hech kim ikkala to‘garakka ham qatnashmaydi.

Demak:

“matematik yoki fizik to‘garakka qatnaydiganlar” soni:

$$5 + 7 = 12$$

Metodik izoh:

O‘quvchiga “yoki” so‘zi ko‘p vaziyatda “qo‘shish”ni bildirishi kerak.

Lekin “yoki” har doim ham qo‘shish emas — kesishma bo‘lmashligini alohida aytish kerak.

Ko‘paytirish qoidasi (ko‘paytma printsiipi)

Ta’rif:

Agar:

birinchi tanlovni amalga oshirishning a ta usuli bo‘lsa,

har bir birinchi tanlov uchun ikkinchi tanlovni bajarishning b ta usuli bo‘lsa,

u holda:

“birinchisi va ikkinchisi” ketma-ket bajarilishining usullari soni:

$$a \cdot b$$

Misol:

3 xil shirinlik bor

4 xil ichimlik bor

Bitta shirinlik va bitta ichimlik tanlash usullari soni:

$$3 \cdot 4 = 12$$

Metodik izoh:

“va” ko‘pincha ko‘paytirish signali.

O‘quvchiga «(birinci tanlov) $\times$ (ikkinchi tanlov)» mental modelini o‘rgatish kerak.

Joylashtirish va tanlash: $P(n,k)$ va $C(n,k)$

Joylashtirish (permutsiya) – tartib muhim

n ta farqli elementdan k tasini tartib bilan joylashtirish:

$$P(n,k) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$$

Agar hammasi ishtirok etsa ($k = n$):

$$P(n,n) = n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1$$

Misol:

5 ta o‘quvchidan 3 tasini doskaga **ketma-ket** chaqirish:

$$P(5,3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Metodik izoh:

“tartib muhimmi?” savolini avtomatik berish – asosiy ko‘nikma.

Agar o‘quvchi tartibni sezmasa, P o‘rniga C qo‘yib yuboradi.

Tanlash (kombinatsiya) – tartib muhim emas

n ta farqli elementdan k tasini tartibsiz tanlash:

$$C(n, k) = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Misol:

10 o'quvchidan 4 tasini komanda tuzish:

$$C(10, 4) = 10! / (4! \cdot 6!)$$

Metodik izoh:

O'quvchiga "komanda, guruh, to'plam" so'zlari kelganda ko'pincha tartib ahamiyatsiz ekanini eslatish kerak.

O'run almashtirish va kombinatsiyaning bog'lanishi

Oddiy munosabat:

$$P(n, k) = C(n, k) \cdot k!$$

Izoh:

Avval k tasini tanlaymiz: $C(n, k)$.

So'ngra ularni ichida joylashtiramiz: $k!$.

Natijada k ta elementning tartibli joylashishlar soni.

Metodik nuqta:

Buni alohida isbotlab berish, so'ng testlarda "qaysi formula kerak?" o'rniga "qanday fikrlash kerak?"ni shakllantiradi.

Qafaslar printsipi (Dirichlet printsipi)

Ta'rif

Agar:

- m ta "kabutar"
- n ta "qafas" bo'lsa
- va $m > n$ bo'lsa,

u holda **kamida bitta qafasda kamida 2 ta kabutar bo'ladi.**

Matematik yozuv:

Agar m va n natural sonlar bo'lsa va $m > n$ bo'lsa, sonlarni n ta guruhga bo'lganda kamida bitta guruhda 2 yoki undan ko'p element bo'ladi.

Sodda misol (metodik)

Masala:

1 dan 8 gacha bo'lgan 5 ta natural son tanlandi. Isbotlang: ular ichida kamida ikkitasining yig'indisi 9 ga teng.

Yechim g'oyasi:

Qafas sifatida juftliklar:
(1,8), (2,7), (3,6), (4,5)

Bu yerda "qafas" – raqam juftligi, "kabutar" – tanlangan son.

4 ta "juftlik-qafas" bor, lekin 5 ta son tanlayapmiz →
Dirichlet printsipli bo'yicha kamida bitta juftlikdan ikkita son tanlanadi.
Ularning yig'indisi 9 bo'ladi.

Metodik izoh:

O'quvchiga qafas va kabutarining "simvolik ma'nosini" tushuntirib,
bir necha masalada "qafasni o'zing tanla" deb mashq qildirish kerak.

Hisoblash strategiyalari: to'g'ridan-to'g'ri sanash, to'ldirish usuli

To'g'ridan-to'g'ri sanash

Masala:

3 ta qiz va 2 ta o'g'ilni bir qatorda necha xil tartibda o'tirg'izish mumkin?

Yechim:

Jami 5 kishi:

$$5! = 120$$

Agar hech qanday cheklov bo'lmasa, shu.

To'ldirish usuli (complement)

Masala:

1 dan 100 gacha bo'lgan sonlar orasidan necha tasini tanlash mumkin, shunda tanlangan sonlarning hech biri 5 ga karrali bo'lmaydi?

Yechim:

1 dan 100 gacha jami 100 son.

5 ga karralilar: 5, 10, ..., 100 $\rightarrow 100 / 5 = 20$ ta.

Demak 5 ga karrali bo'lmaganlar soni: $100 - 20 = 80$.

Metodik izoh:

Ko'p o'quvchi to'g'ridan-to'g'ri sanashga yopishib qoladi.

“Qaysi to'plamni sanash oson?” degan savolni har doim berib borish kerak.

Kombinatorik tenglamalar: bo'lish-va-joylashtirish g'oyasi

Bu bo'limda “nechta yechim bor?” tipidagi masalalar chiqadi.

Masalan:

$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n, x_i \geq 0$, natural sonlar.

Bu – “n ta bir xil sharni k ta qutiga joylash” modeli.

Formulasi:

$$C(n + k - 1, k - 1)$$

Metodik nuqta:

“chiziqlarga bo'lish” modelini ko'rsatish.

Masalan, 7 ta shar va 3 ta quti $\rightarrow$

sharlar: o o o o o o o

qutilar oralig'i uchun 2 ta tayanch: ||

Ranglash usuli (coloring) – kombinatorik invariant

Ranglash – kombinatorika va invariantni bog‘laydigan usul.

Sodda misol

Masala:

8×8 shaxmat taxtasida har bir katakga 0 yoki 1 yozilgan. Har yurishda qo‘shni ikki katakdagi sonlar bittadan o‘zgartiriladi ($0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 0$). Shunday yurishlar ketma-ketligi bilan “hamma joy 0” holatiga kelish mumkinmi?

Yechim (g‘oya):

Taxtani qora-oq ranglaymiz.

Qora kataklardagi 1 lar sonini N_1 , oq kataklardagisini N_2 deymiz.

Har yurishda qanday o‘zgarishi tahlil qilinadi.

Natijada mod 2 bo‘yicha invariant topiladi.

Metodik izoh:

Ranglash – faqat shaxmat taxtasi emas.

“Ikki xil turdagi ob’ektlar” bo‘lgan joyda ranglash usulini taklif qilib ko‘rish foydali.

Extremal printsip: “eng kattasi” va “eng kichigini” tanlash

Extremal printsip – kombinatorikada juda kuchli.

G‘oya:

To‘plamdan eng kattasini yoki eng kichigini ajratib olib, shu elementga qarshi mantiq yurgizish.

Misol (metodik):

n ta haqiqiy son berilgan, hammasi farqli.

Har doim qo‘shni ikkitasini o‘chirib, o‘rniga ularning o‘rtacha arifmetigini yozamiz.

Oxirida qoladigan son qanday bo‘ladi?

Yechim g‘oyasi:

Yig‘indi invariant,

minimal va maksimal qiymat o‘zgarmaydi,

o‘rtacha bo‘lish xususiyatidan foydalaniladi.

Tipik xatolar va ularni oldini olish

1. P va C ni adashtirish
2. Qo‘shish va ko‘paytirish qoidalarini aralashtirish
3. Dirichletda “qafas”ni noto‘g‘ri tanlash
4. Bir xil elementlarni “farqli” deb hisoblash yoki aksincha
5. Imkonsizlik masalalarida misol izlab qolish

Metodik tavsiya:

Har turdagi masaladan keyin “nima uchun boshqa usul noto‘g‘ri?” degan kichik muhokama qilish foydali.

Testdan oldin “xatolar ro‘yxati”ni sinf bilan birga yozish yaxshi usul.

10Darslarni rejalashtirish

Bu bo‘limni Word’da alohida “Dars ishlanma asoslari” sifatida qo‘yish mumkin.

1-dars: Asosiy qoidalar

Qo‘shish va ko‘paytirish printsiplari

Sodda $P(n, k)$, $C(n, k)$ masalalari

Uyga vazifa: 5–7 ta oddiy hisoblash masalasi

2-dars: Komanda va joylashtirish

O‘rin almashtirish va kombinatsiya farqi

$P(n, k) = C(n, k) \cdot k!$ bog‘lanishi

Murakkabroq tanlash masalalari

Dirichlet printsipi

Formal ta'rif

3–4 ta sodda olimpiada masalasi

O'quvchi o'zi "qafas" topadigan mashqlar

Ranglash va invariant g'oyasi

2 rangli shaxmat masalalari

Paritet + ranglash kombinatsiyasi

Mustaqil ish uchun 3–4 masala

Kombinatorik tenglamalar

"Shar-quti" modeli

$C(n + k - 1, k - 1)$ formulasi

Real olimpiada misollari

Aralash mashqlar va mini-olimpiada

8–10 ta turli darajadagi masala

Guruhda muhokama

Yakunda xatolar tahlili

O'qituvchi uchun "odatiy savollar"

O'quvchi bilan ishlayotganda tez-tez berilishi kerak bo'lgan savollar:

Bu yerda tartib ahamiyatlimi?

Bu yerda "va"mi, "yoki"mi?

Narsalar farqlanadimi yoki bir xilmi?

Qafaslar qayerda, kabutarlar qayerda?

To‘g‘ridan-to‘g‘ri sanash qiyinmi? Ehtimol to‘ldirish (complement) osonroqdir?

Ranglash yoki paritet ishlatsa bo‘ladimi?

Agar o‘quvchi o‘z-o‘ziga shu savollarni bera boshlasa — kombinatorik fikrlash shakllangan bo‘ladi.

Yakuniy metodik xulosa

Kombinatorika:

formulalar to‘plami emas,

balki **odam miyasi qanday “nechta”ni hisoblashni bilishining modeli.**

Asosiy printsiplar:

Qo‘shish va ko‘paytirish qoidasi

Joylashtirish va tanlash farqi

Dirichlet printsiipi (qafaslar printsiipi)

Ranglash va invariant

Extremal printsiip

To‘ldirish usuli

O‘qituvchi uchun eng muhim narsa:

Masalaga formula topib berish emas,
balki “nega aynan shu usul ishladi?” degan savol bilan masalani yakunlash.

Shunda o‘quvchi nafaqat masalani yechadi,
balki keyingi o‘xshash masalani ham mustaqil hal qila oladi.

1-masala

Nechta 4 xonali son mavjudki, raqamlarining barchasi turli va **0 bilan boshlanmaydi?**

Yechim:

1-xona: 1–9 dan biri $\rightarrow$ 9 ta

2-xona: qolgan 9 ta (0 ham bo‘lishi mumkin)

3-xona: 8 ta

4-xona: 7 ta

Umumiy son:

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$$

Javob: 4536

2-masala

Nechta 5 belgili parol bor, agar:

har bir belgi raqam (0–9) yoki lotin harfi (A,B,C) bo‘lsa,

kamida bitta harf bo‘lishi shart.

Yechim:

Avval cheklovsiz hisoblaymiz:

13 ta belgi (10 raqam + 3 harf)

Jami: 13^5

Endi **harfsiz** holatlarni ayiramiz (faqat raqamlar): 10^5

Natija: $13^5 - 10^5$

Javob: $13^5 - 10^5$

3-masala

5 ta o‘g‘il va 3 ta qizni bir qatorda shunday joylashtiringki, **qizlar yonma-yon o‘tirgan bo‘lsin.**

Yechim:

Qizlarni 1 ta “blok” deb olamiz.

Bloklar: (QQQ), B1, B2, B3, B4, B5 → jami 6 ta obyekt

Ularni joylashtirish: 6!

Qizlarni o'z ichida joylashtirish: 3!

Natija:

$$6! \cdot 3! = 720 \cdot 6 = 4320$$

Javob: 4320

4-masala

10 ta o'quvchidan **yetakchi va kotib** tanlanadi. Necha xil usul mavjud?

Yechim:

Bu yerda **tartib muhim** (yetakchi $\neq$ kotib).

$$P(10,2) = 10 \cdot 9 = 90$$

Javob: 90

5-masala

1 dan 13 gacha bo'lgan 7 ta son tanlandi. Isbotlang: ulardan ikkitasi orasidagi farq **kamida 2 ga teng**.

Yechim:

Qafaslarni quyidagicha tuzamiz:

{1,2}, {3,4}, {5,6}, {7,8}, {9,10}, {11,12}, {13}

Bu 7 ta qafas.

Agar har bir qafasdan bittadan son olinsa, maksimum 7 ta bo'ladi.

Lekin agar ikkita son **bir qafasga tushsa**, ularning farqi 1 bo'ladi.

Shuning aksi uchun tanlash mumkin emas. Demak kamida 2 farq chiqadi.

Xulosa: shart bajariladi.

6-masala

Har qanday 6 ta butun sondan doim shunday 3 tasi topiladiki, ularning yig'indisi 3 ga bo'linadi.

Yechim:

Qoldiqlar mod 3 bo'yicha: $0, 1, 2 \rightarrow 3$ qafas

- Agar 3 ta son bir xil qoldiqqa ega bo'lsa $\rightarrow$ yig'indi 3 ga bo'linadi
- Aks holda $0+1+2$ kombinatsiyasi bor $\rightarrow$ yig'indi 3 ga bo'linadi

Xulosa: har doim mavjud.

7-masala

1 dan 100 gacha bo'lgan sonlardan nechtasida **kamida bitta 7 raqami bor?**

Yechim:

Avval **7 yo'q** bo'lganlarni sanaymiz.

- O'nlik raqam: 9 ta variant (1–9 dan 7 ni olib tashlaymiz)
- Birlik raqam: 9 ta variant (0–9 dan 7siz)

Jami:

$$9 \cdot 9 = 81$$

Demak keraklisi:

$$100 - 81 = 19$$

Javob: 19

8-masala

Nechta 4 xonali son mavjudki, **raqamlarining hech biri 5 emas?**

Yechim:

- 1-xona: 1–9 dan (5siz) $\rightarrow$ 8 ta
- Qolganlari: 9 ta (5 yo'q)

Natija:

$$8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$$

Javob: 5832

9-masala

Natural sonlardagi yechimlar sonini toping:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

Yechim:

Bu 10 ta bir xil sharni 3 ta qutiga joylash.

Formula:

$$C(10 + 3 - 1, 3 - 1) = C(12, 2) = 66$$

Javob: 66

10-masala

$x + y + z \leq 12$ tengsizlik nechta natural yechimga ega?

Yechim:

Yangi o'zgaruvchi k qo'shamiz:

$$x + y + z + k = 12$$

Endi:

$$C(12 + 4 - 1, 4 - 1) = C(15, 3) = 455$$

Javob: 455

11-masala

Shaxmat taxtasida bitta yurishda 2 ta qo'shni katak rangini almashtirish mumkin. Hamma kataklarni qora holatdan oq holatga o'tkazish mumkinmi?

Yechim (g'oya):

- Taxtani qora-oq ranglaymiz
- Har yurishda qora kataklar soni mod 2 o'zgarmaydi

Dastlab qora kataklar soni juft, oxirida ham shunday bo'lishi kerak. Lekin hammasi oq bo'lsa qora yo'q $\rightarrow$ ziddlik.

Xulosa: mumkin emas.

12-masala

8 ta tanga stolga qo'yilgan. Har yurishda 3 tasini ag'darish mumkin. Hammasini bir xil holatga keltirish mumkinmi?

Yechim:

Ag'darilgan tangalar soni mod 2 invariant.

3 ta ag'darish $\rightarrow$ toq o'zgarish.

Boshlang'ich va oxirgi holat pariteti mos kelmaydi.

Xulosa: mumkin emas.

13-masala

Bir xil bo'lmagan natural sonlar to'plamida eng kichik elementni olib tashlab, o'rniga qolganlarning o'rtacha qiymatini yozamiz. Oxirida nima qoladi?

Yechim (g'oya):

- Yig'indi invariant
- O'rtacha qiymat doim min va max oralig'ida

Oxirida **boshlang'ich o'rtacha arifmetik** qoladi.