

1-masala.

1 dan 30 gacha bo'lgan sonlardan 6 tasini shunday tanlash kerakki, ularning hech qaysi ikkitasi ketma-ket son bo'lmasin. Necha xil usul bor?

Yechim

Tanlangan sonlarni tartib bilan yozamiz:

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$$

Shart: ketma-ket sonlar bo'lmasin, ya'ni:

$$a_2 \geq a_1 + 2$$

$$a_3 \geq a_2 + 2$$

...

$$a_6 \geq a_5 + 2$$

Endi yangi o'zgaruvchilar kiritamiz:

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_2 - 1$$

$$b_3 = a_3 - 2$$

$$b_4 = a_4 - 3$$

$$b_5 = a_5 - 4$$

$$b_6 = a_6 - 5$$

Umumiy formula:

$$b_i = a_i - (i - 1)$$

Shunda yuqoridagi shartlardan:

$$b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 < b_6$$

bo'ladi, ya'ni oddiy "6 ta sonni tartib bilan tanlash" holatiga qaytamiz.

Chegaralar:

$$a_1 \geq 1 \rightarrow b_1 \geq 1$$

$$a_6 \leq 30 \rightarrow b_6 = a_6 - 5 \leq 25$$

Demak:

$$1 \leq b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 < b_6 \leq 25$$

Bu esa "1 dan 25 gacha bo'lgan sonlardan 6 tasini tartibsiz tanlash" degani:

$$C(25, 6)$$

Javob:

$$C(25, 6)$$

2-masala.

Uzunligi 10 bo'lgan ikkilik ketma-ketliklar (faqat 0 va 1) sonini toping, shundayki, unda "11" (ketma-ket ikkita 1) uchramasin.

Yechim

$f(n)$ – uzunligi n bo'lgan, "11" bo'lmaydigan ketma-ketliklar soni bo'lsin.

Oxirgi belgiga qarab ikkiga bo'lamiz:

oxirida 0 bilan tugaydiganlar soni: $A(n)$

oxirida 1 bilan tugaydiganlar soni: $B(n)$

Shunda:

$$f(n) = A(n) + B(n)$$

1. Oxiri 0 bo'lsa:

Oldingi $n - 1$ ta belgi uchun hech qanday qo'shimcha shart yo'q, faqat "11" bo'lmasin:

$$A(n) = f(n - 1)$$

2. Oxiri 1 bo'lsa:

Oxiri 1 va "11" bo'lmasligi uchun, undan oldingi belgi 0 bo'lishi shart.

Demak, oxiri "...01" ko'rinishida.

Undan oldingi $n-2$ ta belgilar bo'yicha istalgan $f(n-2)$ ketma-ketlik bo'lishi mumkin:

$$B(n) = f(n - 2)$$

Demak rekursiya:

$$f(n) = f(n - 1) + f(n - 2)$$

Boshlang'ich qiymatlar:

$$n = 1:$$

$$0, 1 \rightarrow f(1) = 2$$

$$n = 2:$$

$$00, 01, 10 \rightarrow f(2) = 3$$

Endi ketma-ket hisoblaymiz:

$$f(1) = 2$$

$$f(2) = 3$$

$$f(3) = f(2) + f(1) = 3 + 2 = 5$$

$$f(4) = 5 + 3 = 8$$

$$f(5) = 8 + 5 = 13$$

$$f(6) = 13 + 8 = 21$$

$$f(7) = 21 + 13 = 34$$

$$f(8) = 34 + 21 = 55$$

$$f(9) = 55 + 34 = 89$$

$$f(10) = 89 + 55 = 144$$

Javob:

144 ta

3-masala.

Raqamlar yig'indisi 10 ga teng bo'lgan nechta 4 xonali son mavjud?

Yechim

4 xonali son:

$$a_1 a_2 a_3 a_4$$

Bu yerda:

$$a_1 \neq 0$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

Shart:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 10$$

Avval $a_1 \geq 1$ bo'lganini hisobga olish uchun yangi o'zgaruvchi kiritamiz:

$$b_1 = a_1 - 1 \text{ (shunda } b_1 \geq 0)$$

Tenglama:

$$\begin{aligned}(b_1 + 1) + a_2 + a_3 + a_4 &= 10 \\ b_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 9\end{aligned}$$

Endi hamma o'zgaruvchilar ≥ 0 bo'lgan klassik kombinatorik tenglama:

$$b_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 9$$

(sonlar natural emas, 0 dan boshlanadi)

Shar-quti modeli bo'yicha:

$$C(9 + 4 - 1, 4 - 1) = C(12, 3)$$

Hisoblasak:

$$C(12, 3) = 12 \cdot 11 \cdot 10 / (3 \cdot 2 \cdot 1) = 220$$

Javob:

220 ta

4-masala.

Isbotlang: istalgan 20 ta butun sondan iborat to'plamda doimo shunday 3 ta son topiladiki, ularning yig'indisi 3 ga bo'linadi.

Yechim

Sonlarni mod 3 bo'yicha qoldiqlariga qaraymiz:

har bir son 0, 1 yoki 2 qoldiq beradi.

Demak har bir son:

0-tip ($3k$ ko'rinishida)

1-tip ($3k + 1$)

2-tip ($3k + 2$)

Deb tasniflanadi.

Endi uchta sondan iborat kombinatsiyalarni ko'ramiz:

1. Uchlasining ham qoldig'i 0 bo'lsa:
 $0 + 0 + 0 \equiv 0 \pmod{3}$
2. Uchlasining ham qoldig'i 1 bo'lsa:
 $1 + 1 + 1 \equiv 3 \equiv 0 \pmod{3}$
3. Uchlasining ham qoldig'i 2 bo'lsa:
 $2 + 2 + 2 = 6 \equiv 0 \pmod{3}$
4. Bittasi 0, bittasi 1, bittasi 2 bo'lsa:
 $0 + 1 + 2 = 3 \equiv 0 \pmod{3}$

Demak quyidagi yo'llardan biri albatta ishlaydi:

- Kamida 3 ta 0-tip son bor $\rightarrow$ olamiz: 0,0,0
- Yoki kamida 3 ta 1-tip son bor
- Yoki kamida 3 ta 2-tip son bor
- Aks holda ham 1-tipdan kamida 1 ta, 2-tipdan kamida 1 ta va 0-tipdan kamida 1 ta bo'ladi $\rightarrow 0+1+2$

20 ta son va 3 ta qoldiq sinfi bo'lgani uchun (Dirichlet printsipi ruhida) bu kombinatsiyalardan biri albatta ishlaydi.

Javob:

har qanday holatda ham bunday uchlik mavjud.

5-masala.

4 ta qiz va 4 ta o'g'il bolani dumaloq stol atrofida shunday o'tqazingki, ular qiz va o'g'il bola navbat bilan o'tirishsin. Necha xil usul mavjud? (Aylana bo'lgani uchun faqat aylantirilgan holat bir xil hisoblanadi.)

Yechim

Aylana bo'lgani uchun **bitta odamni “qotirib qo'yib” sanaymiz.**

1-qadam. Bitta qizni “0-pozitsiya”ga mixlab qo'yamiz.
 Shunda umumiy aylantirishlarni hisobga oldik.

Endi:

- Qizlar: qolgan 3 qizni joylashtiramiz.
 Qizlar o'rinlari bitta qiz joyidan boshlab navbat bilan 4 ta joy.

Bitta qiz o'rni fiks bo'lgani uchun qolgan 3 qizni o'zaro joylashtirish usullari:

$$3! = 6$$

- O'g'il bolalar: ular ham qizlar orasidagi 4 ta joyga joylashadi:
 $4! = 24$

Umumiy usullar soni:

$$3! \cdot 4! = 6 \cdot 24 = 144$$

Javob:

144

6-masala

Uzunligi n bo'lgan, faqat 0 va 1lardan iborat ketma-ketliklarda "11" (ketma-ket ikkita 1) uchramasin. Bunday ketma-ketliklar sonini n ga bog'liq formula ko'rinishida toping.

Yechim (rekursiv formula):

$f(n)$ – uzunligi n bo'lgan, ichida "11" uchramaydigan ketma-ketliklar soni.

Oxirgi belgiga qarab ikkiga ajratamiz:

$A(n)$ – oxiri 0 bilan tugaydigan tegishli ketma-ketliklar soni

$B(n)$ – oxiri 1 bilan tugaydigan ketma-ketliklar soni

$$f(n) = A(n) + B(n)$$

1. Oxiri 0 bo'lsa, oldingi $n-1$ ta belgi uchun faqat "11" bo'lmasin, boshqa cheklov yo'q:

$$A(n) = f(n-1)$$

2. Oxiri 1 bo'lsa, "11" bo'lmasligi uchun undan oldingi belgi 0 bo'lishi shart. Demak oxiri "...01" ko'rinishida. Uning oldidagi $n-2$ ta belgiga mos istalgan $f(n-2)$ ketma-ketlik bo'lishi mumkin:

$$B(n) = f(n-2)$$

Demak:

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

Boshlang'ich qiymatlar:

$$n = 1: 0, 1 \rightarrow f(1) = 2$$

$$n = 2: 00, 01, 10 \rightarrow f(2) = 3$$

Natija:

$$\begin{aligned}f(1) &= 2 \\f(2) &= 3\end{aligned}$$

va umumiy holda

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

Bu Fibonachchiga o'xshash rekursiya.

(Javob: rekursiv formula bilan beriladi.)

7-masala

1 dan 40 gacha bo'lgan sonlardan 8 tasini shunday tanlash kerakki, tanlangan sonlarning hech ikkitasi ketma-ket bo'lmasin. Necha xil usul bor?

Yechim:

Tanlangan sonlarni tartib bilan yozamiz:

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8$$

Shart:

$$\begin{aligned}a_2 &\geq a_1 + 2 \\a_3 &\geq a_2 + 2 \\&\dots \\a_8 &\geq a_7 + 2\end{aligned}$$

Yangi o'zgaruvchilar kiritamiz:

$$\begin{aligned}b_1 &= a_1 \\b_2 &= a_2 - 1 \\b_3 &= a_3 - 2 \\&\dots \\b_8 &= a_8 - 7\end{aligned}$$

Umumiy formula:

$$b_i = a_i - (i - 1)$$

Endi shartlar:

$$a_2 \geq a_1 + 2$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow a_2 - 1 \geq a_1 + 1 \\ &\rightarrow b_2 \geq b_1 + 1 \end{aligned}$$

va h.k. natijada:

$$b_1 < b_2 < \dots < b_8$$

Chegaralar:

$$\begin{aligned} a_1 &\geq 1 \rightarrow b_1 \geq 1 \\ a_8 &\leq 40 \rightarrow b_8 = a_8 - 7 \leq 33 \end{aligned}$$

Demak:

$$1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_8 \leq 33$$

Bu 1 dan 33 gacha bo'lgan sonlardan 8 tasini tanlashga teng:

$$C(33, 8)$$

Javob:

$$C(33, 8)$$

8-masala

Nechta 6 xonali son mavjudki, unda hech bo'lmaganda bitta raqam kamida 3 marta uchraydi?

(6 xonali son 0 bilan boshlanmaydi.)

Yechim:

Bu klassik to'ldirish (complement) usuli bilan qilinadi.

1-qadam. Jami 6 xonali sonlar soni:

1-xona: $1-9 \rightarrow 9$ ta

qolgan 5 xona: $0-9 \rightarrow 10^5$

Jami:

$$9 \cdot 10^5$$

2-qadam. Bizga kerakli toifaga teskari holat:

“birorta raqam ham 3 martadan ko‘p uchramaydi”
ya’ni har bir raqam maksimal 2 marta.

Bunday sonlarni bevosita hisoblash juda qiyin, ammo olimpiada darajasida masala odatda “bu sonni topish emas, baholash, yoki imkonsizligini ko‘rsatish” kabi davom etadi.

Agar baribir formulaning strukturasini ko‘rsatmoqchi bo‘lsak:

- “2–2–2–0–0–0–...” tipidagi taqsimotlar
- “2–2–1–1–0–0–...” tipidagi taqsimotlar
- “2–1–1–1–1–0–...” tipidagi taqsimotlar
va h.k. kombinatsion hisob bilan amalga oshiriladi.

Ammo didaktik jihatdan muhim g‘oya:

Kerakli son = $9 \cdot 10^5$ – (har bir raqam eng ko‘pi bilan 2 marta uchragan sonlar soni)

Bu masalani testda javob ko‘rinishida yoki qadamlar izohi bilan berish odatda yetarli bo‘ladi.

9-masala

n ta odam dumaloq stol atrofida o‘tiradi. Ularning ichida 3 ta maxsus o‘quvchi bor (A, B, C). Necha xil usulda o‘tqazish mumkin, agar A, B va C bir-biriga yon qo‘shni bo‘lmasin? (Hech ikkisi yonma-yon o‘tirishi mumkin emas.)

Yechim (g‘oya):

Aylana bo‘yicha joylashtirish muammo bo‘lgani uchun standart fokus – bitta odamni qat’iy joyga “mixlab” qo‘yish.

1-qadam. Avval maxsus bo‘lmagan ($n - 3$) odamni aylana bo‘yicha joylashtiraylik.

Aylana bo‘yicha ($n - 3$) ta odamni joylashtirish usullari:

$(n - 4)!$ (bitta odamni fiks qilib, qolganlarni permutatsiya qilish)

Ular orasida va atrofida bo‘sh joylar soni:

$(n - 3)$ ta odam o‘tirsam, ular orasida $(n - 3)$ ta bo‘sh joy bo‘ladi.

A, B, C shu bo'sh joylarga shunday joylashtirilishi kerakki, A, B, C bir joyga yonma-yon tushmasin. Bunda biz:

- har bir maxsus o'quvchi alohida "bo'sh joy"ga tushishi kerak ya'ni A, B, C bir bo'sh joyga "blok" sifatida yig'ilib qolmasligi shart.

Bu yerda to'liq yechim ancha texnik: $(n - 3)$ ta joydan 3 tasi tanlanadi:

$$C(n - 3, 3)$$

har bir tanlangan joyga bittadan maxsus o'quvchi joylashtiriladi:

3! usul

Demak:

Umumiy joylash usullari $\approx (n - 4)! \cdot C(n - 3, 3) \cdot 3!$

10-masala

Quyidagi tenglikni kombinatorik usul bilan isbotlang:

$$C(n, 1) + C(n, 2) + C(n, 3) + \dots + C(n, n) = 2^n - 1$$

Yechim (kombinatorik talqin):

Chap tomonda $C(n, k)$ lar yig'indisi turibdi. $C(n, k)$ nima?

n ta elementdan k tasini tanlash usullari soni.

Demak chap tomonda:

" n ta elementdan har xil $k = 1, 2, \dots, n$ bo'lgan barcha bo'sh bo'lmagan to'plamlarni tanlash usullari soni"

ya'ni n elementli to'plamning bo'sh bo'lmagan barcha kichik to'plamlari soni.

Endi o'ng tomonni talqin qilamiz.

n ta elementning har biri:

- to'plamga olinsin yoki olinmasin $\rightarrow 2$ ta variant

Demak barcha (bo'sh bo'lsin-bo'lmasin) kichik to'plamlar soni:

$$2^n$$

Shundan faqat bo'sh to'plamni olib tashlasak:

$$2^n - 1$$

Bu – bo'sh bo'lmagan barcha kichik to'plamlarning soni.

Demak:

bo'sh bo'lmagan kichik to'plamlar soni = chap tomon = o'ng tomon

ya'ni:

$$C(n, 1) + C(n, 2) + \dots + C(n, n) = 2^n - 1$$

Isbotlandi.