

KO'PHADLAR(POLINOMLAR)

1-BO'LIM. KO'PHADLARNING OLIMPIADADAGI O'RNI

1.1. Nega ko'phadlar juda muhim?

Olimpiadada ko'phadlar:

- tenglama emas $\rightarrow$ **strukturani** ochadi
- algebra $\rightarrow$ **mantiq vositasiga** aylanadi
- ko'p mavzularga ko'prik bo'ladi (sonlar nazariyasi, tengsizlik, funksional tenglama)

Ko'p masalalar aslida:

“Bu ko'phad nolga qachon teng bo'lishi mumkin?”

degan savolga borib taqaladi.

1.2. Oddiy, lekin hal qiluvchi faktlar

O'quvchi bilishi shart:

Agar $P(x)$ darajasi n bo'lgan ko'phad bo'lsa va u $n + 1$ ta turli nuqtada nolga teng bo'lsa unda $P(x) \equiv 0$.

Bu olimpiadada eng ko'p ishlatiladigan faktlardan biri.

1.3. KLASSIK OLIMPIADA MISOLI 1

Masala

$P(x)$ darajasi ≤ 100 bo'lgan ko'phad.

Agar: $P(1) = P(2) = P(3) = \dots = P(101) = 0$

bo'lsa, isbotlang:

$$P(x) \equiv 0$$

Yechim

$P(x)$ darajasi ≤ 100 , lekin u **101 ta turli nuqtada** nolga teng.

Demak, nolmas ko'phad maksimal 100 ta ildizga ega bo'lishi mumkin.
Bu qarama-qarshilik.

Shunday qilib:

$$P(x) \equiv 0$$

1.4. Metodik izoh

Bu masala o'quvchini:

- faktni mexanik yodlashdan
- **chegara-mantiq**ga olib kiradi

O'qituvchi savol beradi:

“Agar 100 ta emas, 101 ta nuqta bo'lsa — nima bo'ladi?”

1.5. KLASSIK OLIMPIADA MISOLI 2 (simmetriya)

Masala

$P(x)$ ko'phad shundayki:

$P(x) = P(1 - x)$ BARCHA x uchun.

Isbotlang:

$$P(x) = Q(x(x - 1))$$

ko'rinishda yozish mumkin.

G'oya (tahlil)

Bu tenglama shuni anglatadi:

- $P(x)$ qiymati x va $1 - x$ da bir xil
- demak ko'phad **simmetrik**

Asosiy invariant:

$$x(x - 1)$$

Shuning uchun P faqat shu ifodaga bog'liq bo'lishi mumkin.

Bu juda kuchli olimpiada g'oyasi.

1.6. METODIK XULOSA (1-BO'LIM)

Ko'phadni qiymatlar to'plami orqali boshqarish

Ildizlar soni — eng muhim cheklov

Simmetriya → o'zgarmas ifoda

Formula emas, strukturani ko'rish

2-BO'LIM. ILDIZLAR VA VIYE

Ko'phadni ildizlar orqali “ko'rish” usuli

2.1. Olimpiadadagi asosiy g'oya

Maktabda Viyet:

“ildizlar yig'indisi va ko'paytmasi formulalari”

Olimpiadada esa Viyet:

“ko'phadni **ildizlar to'plami** orqali boshqarish”

Ko'p masalalarda savol shunday:

- ildizlar qanday joylashgan?
- ularda qanday simmetriya bor?
- ildizlar orqali ko'phadni qayta qurish mumkinmi?

2.2. VIYET FORMULALARINI TO'G'RI TALQIN QILISH

Agar:

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$$

va uning ildizlari:

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

bo'lsa, u holda:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_1$$
$$\sum_i x_i x_j = a_2$$

...

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n a_n$$

Metodik urg'u

Bu formulalar:

- hisoblash uchun emas,
- ildizlar ustida mantiq yuritish uchun.

2.3. KLASSIK OLIMPIADA MISOLI 1

(ildizlar bilan ko'phad qurish)

Masala

$P(x)$ darajasi 3 bo'lgan ko'phad. Uning ildizlari:

$$x_1, x_2, x_3$$

shundayki:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 6 \\x_1 x_2 x_3 &= 4\end{aligned}$$

$P(1)$ ni toping.

=

Yechim

Avval ildizlar ustida ishlaymiz.

Ma'lum:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)$$

Demak:

$$6 = 0 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)$$

undan:

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = -3$$

Endi standart ko‘rinish:

$$P(x) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$$

Berilganlarni qo‘yamiz:

$$P(x) = x^3 - 0 \cdot x^2 - 3x - 4$$

Endi:

$$P(1) = 1 - 3 - 4 = -6$$

Javob: **-6**

2.4. METODIK XULOSA (misol 1)

- Kvadrat ildizlar berilsa → **darhol yig‘indi va juft ko‘paytmaga o‘tish**
- Koeffitsiyentlarni topmasdan turib $P(1)$ baholandi
- To‘liq ko‘phadni tuzish — ko‘pincha eng tez yo‘l

2.5. KLASSIK OLIMPIADA MISOLI 2

(ildizlar simmetriyasi)

Masala

$P(x)$ — haqiqiy koeffitsiyentli ko‘phad.

Agar:

$$x_0 - 1/x_0$$

$P(x)$ ning ildizi bo‘lsa va $x_0 \neq 0$ bo‘lsa, isbotlangki:

$$x_0 + 1/x_0$$

ham $P(x)$ ning ildizi.

Yechim (g‘oya)

Haqiqiy koeffitsiyentli ko‘phadlarda ildizlar:

- qo'shma juftliklarda
- yoki simmetriyalar orqali keladi

Bu masalada:

$$f(x) = x - \frac{1}{x}$$

va

$$g(x) = x + \frac{1}{x}$$

orasidagi algebraik bog'lanish mavjud.

Metodik yo'l:

- ildizlarni ifoda orqali bog'lash
- transformatsiya qo'llash
- ko'phad strukturasi buzilmasligini ko'rsatish

(Bu masala o'qituvchi bilan sinfda tahlil qilish uchun juda foydali.)

2.6. VIYET + INVARIANT FIKR

Muhim kuzatuv

Agar ildizlar o'zgarganda:

$$x_i \rightarrow f(x_i)$$

va ayrim ifoda o'zgarmay qolsa,
bu — **invariant**.

Masalan:

$$\begin{aligned} & x + \frac{1}{x} \\ & x(1 - x) \\ & x + y, xy \end{aligned}$$

Ko'phad masalalarida invariantni topish — 50% g'alaba.

2.7. KLASSIK OLIMPIADA MISOLI 3

(ildizlarni guruhlash)

Masala

$P(x)$ — darajasi 4 boʻlgan koʻphad.

Agar:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= x_3 + x_4 \\ x_1x_2 &= x_3x_4\end{aligned}$$

boʻlsa, koʻrsating:

$$\{x_1, x_2\} = \{x_3, x_4\}$$

Yechim

Faraz qilamiz:

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - Sx + T$$

bu yerda:

$$\begin{aligned}S &= x_1 + x_2 \\ T &= x_1x_2\end{aligned}$$

Xuddi shunday:

$$(x - x_3)(x - x_4) = x^2 - Sx + T$$

Demak bu ikkala kvadrat koʻphad teng.

Shuning uchun ularning ildizlar toʻplami bir xil.

2.8. OʻQITUVCHI UCHUN METODIK TAVSIYA

Viyet — faqat formula emas

Ildizlarni “shaxs” sifatida qarash oʻrgatiladi

Kvadrat ifodalar — tez-tez ishlatiladigan koʻpri

Simmetriya koʻrila boshlaydi

Noaniq koeffitsiyentli masalalar osonlashadi

2.9. 2-BO‘LIM XULOSASI

- Ildizlar yordamida ko‘phadni tiklash mumkin
- Viyet — ildizlar invariantlari tili
- Kvadrat yig‘indilarni darhol ochish kerak
- Olimpiadada ko‘pincha $P(1)$, $P(-1)$, $P(2)$ kabi qiymatlar so‘raladi

3-BO‘LIM. KO‘PHADLARNI BAHOLASH VA CHEGARALASH

“Aniq topish emas — to‘g‘ri chegaralash”

3.1. Asosiy g‘oya (olimpiada nigohi)

Ko‘p olimpiada masalalarida savol:

- $P(x)$ ni **toping** emas,
- $P(x)$ ning **qayerda qanday qiymatlar olishi mumkin.**

Ya‘ni:

- aniq formula ikkinchi darajali
 - **chegara va baholash – hal qiluvchi**
-

3.2. Eng muhim prinsip

Agar $P(x)$ ko‘phad bo‘lsa va x haqiqiy bo‘lsa, unda:

- ekstremal qiymatlar
- **maxsus nuqtalarda** yoki
- **ildizlar yaqinida** yuz beradi.

Shuning uchun olimpiadada tez-tez sinab ko‘riladi:

$$x = 0, 1, -1, 2, -2$$

yoki ildizlardan kelib chiqqan nuqtalar.

3.3. KLASSIK MISOL 1

(normallash + baholash)

Masala

$P(x)$ — darajasi n boʻlgan koʻphad, yetakchi koeffitsiyenti 1.
Isbotlangki:

$$|P(0)| + |P(1)| + \dots + |P(n)| \geq 1$$

Yechim (tahlil bilan)

Koʻphadni qaraymiz:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

Agar:

$$|P(0)| < 1, |P(1)| < 1, \dots, |P(n)| < 1$$

boʻlsa, u holda:

- har bir $(k - x_i) < 1$ boʻlishi kerak
- bu geometrik joylashuv nuqtai nazaridan **imkonsiz**

Kamida bitta $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ uchun:

$$|P(k)| \geq 1$$

Demak:

$$|P(0)| + \dots + |P(n)| \geq 1$$

Metodik izoh

Bu masala:

- ildizlar joylashuvi
- disklar gʻoyasi
- “hammasi kichik boʻla olmaydi” degan fikr

ni shakllantiradi.

3.4. MAXSUS NUQTALAR TEXNIKASI

Asosiy savol:

Qaysi x larni tekshirish **eng foydali**?

Koeffitsiyentlar butun $\rightarrow x = 0, 1, -1$
Simmetriya bor $\rightarrow$ simmetriya nuqtalari
Yetakchi had ustun $\rightarrow |x|$ katta bo'lganda baholash

3.5. KLASSIK MISOL 2

(± 1 nuqtalaridagi farq)

Masala

$P(x)$ — darajasi n bo'lgan ko'phad.
Isbotlang:

$$|P(1)| + |P(-1)| \geq 2^{(-n)}$$

agar $P(x)$ ning barcha koeffitsiyentlari $|a_i| \leq 1$ bo'lsa.

Yechim g'oyasi

Yozamiz:

$$\begin{aligned} P(1) &= a_0 + a_1 + \dots + a_n \\ P(-1) &= a_0 - a_1 + a_2 - \dots \pm a_n \end{aligned}$$

Bu ikkisini qo'shsak va ayirsak:

$$|P(1)| + |P(-1)| \geq |2a_0|$$

Koeffitsiyentlar chegaralanganligi hisobga olinadi.
Natija eksponent chegaraga olib keladi.

Metodik izoh

Bu masala:

- “koeffitsiyentlar kichik”
- “qiymatlar baribir katta chiqadi”

g'oyasini ko'rsatadi.

3.6. CHEGARALASH + EKSTREMAL FIKR

Muhim metod

Agar $P(x) \neq 0$ bo'lsa, darajasi n bo'lgan ko'phad:

- $n + 1$ ta nuqtada juda kichik bo'la olmaydi

Bu 1-bo'limdagi:

“ $n + 1$ ta nol $\rightarrow$ identik nol”

faktining baholash ko'rinishi.

3.7. KLASSIK MISOL 3

(ekstremal nuqtani tanlash)

Masala

$P(x)$ — darajasi n bo'lgan ko'phad, $|P(x)| \leq 1$ barcha $x \in [-1,1]$ da.
Isbotlang:

$$|P'(0)| \leq n^2$$

Yechim (g'oya)

Bu — **Markov tengsizligi**ning maxsus holati.

Asosiy fikr:

- ko'phad tekis intervalda juda tekis bo'la olmaydi
- hosila majburiy ravishda $|x|$ kichik joyda katta bo'lishi mumkin

Bu masala:

- analiz bilan chorraha
- olimpiada uchun **yuqori daraja**

3.8. O'QITUVCHI UCHUN METODIK YO'NALISH

“Qiymatni hisobla” emas,
“Qaerda tekshirsak yetadi?”
Maxsus nuqtalar orqali haddan tashqari soddalashadi
Baholash → umumiy fikrlashni oshiradi
Bu bo‘limdan keyin ko‘p masala “ochilib ketadi”

3.9. 3-BO‘LIM XULOSASI

- Ko‘phadni baholash — strategiya
- Maxsus nuqtalar — kalit
- Hamma joyda teng kichik bo‘la olmaydi
- Chegaralar ko‘pincha ildizlar bilan bog‘langan
- Olimpiadada juda kuchli qurol

4-BO‘LIM. KOEFFITSIYENTLAR BILAN ISHLASH

Yetakchi hadni boshqarish va qarama-qarshilik chiqarish

4.1. Asosiy g‘oya

Ko‘p masalalarda ko‘phad:

- **ildizlari bilan emas,**
- **koeffitsiyentlari shakli bilan** ochiladi.

Yetakchi koeffitsiyent:

- ko‘phadning “yo‘nalishini” belgilaydi
- katta $|x|$ da xatti-harakatni boshqaradi

Past darajadagi koeffitsiyentlar:

- maxsus nuqtalarda $(0, \pm 1)$ qiymatni belgilaydi

4.2. Normallashtirish texnikasi (ENG MUHIM)

Agar masalada:

- yetakchi koeffitsiyent berilmagan bo‘lsa
- yoki baholash talab qilinsa **normallashtirish** amalga oshiriladi.

Masalan, agar:

$$P(x) = a_n x^n + \dots, \quad a_n \neq 0$$

bo'lsa, ko'pincha:

$$Q(x) = P(x) / a_n$$

o'tkaziladi va $Q(x)$ yetakchi koeffitsiyenti 1 bo'ladi.

Bu baholashni **bir necha baravar soddalashtiradi**.

4.3. KLASSIK MISOL 1

Masala

$P(x)$ — darajasi n bo'lgan ko'phad.

Agar:

$$P(1) = P(2) = \dots = P(n) = 0$$

bo'lsa, isbotlang:

$$|a_0| \geq 1$$

bu yerda a_0 — erkin had.

Yechim

Ko'phadni yozamiz:

$$P(x) = a_n(x-1)(x-2) \dots (x-n)$$

Endi $x = 0$ qo'yamiz:

$$P(0) = a_n(-1)(-2) \dots (-n) = a_n(-1)^n n!$$

Demak:

$$|P(0)| = |a_n| \cdot n!$$

Agar yetakchi koeffitsiyent 1 deb normallashtirsak:

$$|a_0| = n! \geq 1$$

Isbot tugadi.

Metodik izoh

Bu masalada:

- ildizlar orqali koeffitsiyentga o'tish
- “ko‘p nuqtada nol $\rightarrow$ had majburiy katta”

g‘oyasi ishladi.

4.4. KOEFFITSIYENTLAR VA MAXSUS NUQTALAR

Tezkor texnika

Koeffitsiyentlar bilan ishlaganda darhol sinab ko‘riladi:

$$x = 0 \rightarrow a_0$$

$x = 1 \rightarrow \sum$ koeffitsiyentlar

$x = -1 \rightarrow$ alternirlangan yig‘indi

Bu **eng tez tekshiruv nuqtalari**.

4.5. KLASSIK MISOL 2

(qarama-qarshi xulosa chiqarish)

Masala

$P(x)$ — darajasi n bo‘lgan ko‘phad.

Agar barcha koeffitsiyentlari $|a_i| \leq 1$ bo‘lsa, isbotlang:

$$|P(1)| \leq n + 1$$

Yechim

Yozamiz:

$$P(1) = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

Uchburchak tengsizlikdan:

$$|P(1)| \leq |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n| \leq n + 1$$

Isbot tugadi.

Metodik izoh

Bu juda oddiy ko‘rinadi, lekin:

- murakkab masalalarda **asosiy baholovchi qadam** bo‘ladi
- “koeffitsiyent kichik $\rightarrow$ qiymat ham cheklangan”

qoidasi mustahkamlanadi.

4.6. QARSHI MISOLLAR QANDAY QURILADI?

Olimpiada fokus

Ko‘pincha isbot talab qilinmaydi, balki:

“bunday ko‘phad mavjud emas”

deyiladi.

Bu holda:

1. faraz qilinadi
2. koeffitsiyentlar normallashtiriladi
3. maxsus nuqtalarda chegaralar tekshiriladi
4. **qarama-qarshilik chiqadi**

4.7. KLASSIK MISOL 3

(mavjud emasligini isbotlash)

Masala

Darajasi 3 bo‘lgan ko‘phad mavjud emasligini ko‘rsating, agar:

$$P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = 1$$

Yechim

Agar shunday ko'phad mavjud bo'lsa, qaraymiz:

$$Q(x) = P(x) - 1$$

U holda:

$$Q(0) = Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0$$

Lekin $Q(x)$ darajasi ≤ 3 , ammo 4 ta turli nuqtada nolga teng.

Bu faqat:

$$Q(x) \equiv 0$$

bo'lgandagina mumkin.

Demak:

$$P(x) \equiv 1$$

lekin bu darajasi 3 emas.

Qarama-qarshilik.

4.8. O'QITUVCHI UCHUN METODIK YO'NALISH

Normallashtirishni refleks darajasiga olib chiqish

Maxsus nuqtalarda tekshirishni odat qilish

Qarama-qarshilik — kuchli qurol

Koeffitsiyentlar masalani “yorib tashlaydi”

Ildizsiz ham ko'p masala ochiladi

4.9. 4-BO'LIM XULOSASI

- Koeffitsiyentlar $\rightarrow$ maxsus qiymatlar
- Normallashtirish $\rightarrow$ soddalashtirish
- Qarama-qarshi xulosa $\rightarrow$ isbot
- Ko'phadni “yashirin tomondan” ko'rish o'rganiladi
- Olimpiadada juda samarali bo'lim

5-BO'LIM. BUTUN VA RATSIONAL ILDIZLAR

Gauss teoremasidan olimpiadada foydalanish

5.1. Asosiy teorema (faqat boshlanish)

Agar:

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

butun koeffitsiyentli ko'phad bo'lsa va

$$r = \frac{p}{q}$$

($EKUB(p, q) = 1$) uning ratsional ildizi bo'lsa, u holda:

$$\begin{array}{l} p \mid a_0 \\ q \mid a_n \end{array}$$

Bu **Gauss teoremasi**.

5.2. Olimpiadadagi haqiqiy maqsad

Maktabda:

- barcha bo'luvchilarni tekshirish

Olimpiadada:

- **ildiz umuman mavjud emasligini ko'rsatish**
- yoki ildiz **qiymatini majburlab chiqarish**

5.3. KLASSIK MISOL 1

(mavjud emasligini isbotlash)

Masala

Isbotlang:

$$x^3 + 3x + 1 = 0$$

tenglama ratsional ildizga ega emas.

Yechim

Bu ko'phad uchun:

$$a_0 = 1, a_3 = 1$$

Ratsional ildizlar faqat:

$$\pm 1$$

bo'lishi mumkin.

Tekshiramiz:

$$\begin{aligned} x = 1 &\rightarrow 1 + 3 + 1 = 5 \neq 0 \\ x = -1 &\rightarrow -1 - 3 + 1 = -3 \neq 0 \end{aligned}$$

Demak ratsional ildiz yo'q.

Metodik izoh

Bu misolda:

- hisob kam
- xulosa tez
- “hammasini tekshir” emas, **tekshirib bo'lmashligini ko'rsat**

o'rgatiladi.

5.4. KLASSIK MISOL 2

Masala

Butun koeffitsiyentli ko'phad:

$$P(x) = x^3 - ax^2 + bx - 6$$

ma'lumki, uning barcha ildizlari butun.
(a, b) ni toping.

Yechim

$$a_0 = -6, a_3 = 1.$$

Gauss bo'yicha barcha ildizlar:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

Yana ma'lum:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= a \\x_1 x_2 x_3 &= 6\end{aligned}$$

Butun sonlar ichida 6 ni beradigan uchliklarni tekshiramiz:

$$1, 2, 3$$

(yoki belgilar bilan).

Demak:

$$\begin{aligned}a &= 1 + 2 + 3 = 6 \\b &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 11\end{aligned}$$

Metodik izoh

- Ildizlar ro'yxati $\rightarrow$ juda kichik
- Viyet bilan birlashtirish $\rightarrow$ tez yechim
- "ko'p noma'lum" bir zumda bitta holatga tushadi

5.5. GAUSS QACHON ISHLAMAYDI? !

Metodik jihatdan MUHIM.

Gauss ishlamaydi, agar:

- koeffitsiyentlar butun bo'lmasa
- yoki ildiz irratsional bo'lsa
- yoki masala haqiqiy ildiz sonini so'rasa

Bu paytda boshqa bo'limlarga o'tamiz:

- baholash
- diskriminant
- simmetriya

- interpolatsiya

5.6. KLASSIK MISOL 3

(aldovli masala)

Masala

$$2x^3 - 3x^2 + x - 1 = 0$$

ratsional ildizlarga egami?

Yechim

$$a_0 = -1, a_3 = 2.$$

Ratsional ildizlar mumkin bo'lganlar:

$$\pm 1, \pm 1/2$$

Tekshiramiz:

- $x = 1 \rightarrow -1$
- $x = -1 \rightarrow -5$
- $x = 1/2 \rightarrow -3/4$
- $x = -1/2 \rightarrow -7/4$

Demak ratsional ildiz yo'q.

Metodik izoh

Bu turdagi masalalar:

- tez testlar
- oraliq bosqichlarda tez qaror chiqarish

uchun juda mos.

5.7. GAUSS + NORMALLASH TEXNIKASI

Agar yetakchi koeffitsiyent katta bo'lsa:

$$P(x) = 7x^3 + \dots$$

Ko'pincha:

- ko'phadni darhol tekshiramiz
- kerak bo'lsa koeffitsiyentni chiqarib
- soddalashtirib keyin Gauss qo'llanadi

5.8. O'QITUVCHI UCHUN METODIK TAVSIYA

Gauss — “tekshir-bekor qil” quroli

Ko'p hollarda “ildiz yo'q” degan javob eng to'g'ri

Viyet bilan bog'lab berish shart

“Qachon ishlamaydi?” alohida aytiladi

Olimpiada tezligi oshadi

5.9. 5-BO'LIM XULOSASI

- Ratsional ildizlar cheklangan
- Gauss — qisqartirish quroli
- Viyet tezlashtiradi
- Hamisha ishlamaydi — tanlash muhim
- Olimpiadada juda foydali

6-BO'LIM. INTERPOLATSIYA VA “KO'P NUQTADA NOL” G'OYASI

6.1. Asosiy g'oya

Bu bo'limning markaziy fakti:

Darajasi $\leq n$ bo'lgan ko'phad **$n + 1$ ta turli nuqtada aniqlansa,**
u **yagona** bo'ladi.

Shuning uchun olimpiadada juda ko'p masalalar quyidagi shaklda yashiringan bo'ladi:

- noma'lum ko'phad berilgan
- uning qiymatlari ko'p nuqtada ma'lum
- yoki farqi ko'p nuqtada nolga teng

6.2. ENG MUHIM NATIJA

(ko‘p nuqtada nol $\rightarrow$ identik nol)

Agar:

$$\deg P \leq n$$

va

$$P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_{n+1}) = 0$$

(bu yerda x_i lar turli)

unda:

$$P(x) \equiv 0$$

Bu — interpolatsiyaning **eng kuchli natijasi**.

6.3. KLASSIK OLIMPIADA MISOLI 1

(interpolatsiya bilan yengil isbot)

Masala

Darajasi ≤ 100 bo‘lgan ko‘phad uchun:

$$\begin{aligned} P(1) &= 1 \\ P(2) &= 2 \\ &\dots \\ P(101) &= 101 \end{aligned}$$

isbotlang:

$$P(x) = x$$

Yechim

Qaraymiz:

$$Q(x) = P(x) - x$$

U holda:

$$Q(1) = Q(2) = \dots = Q(101) = 0$$

Lekin:

$$\deg Q \leq 100$$

101 ta turli nuqtada nolga teng bo'lgan ko'phad faqat nol bo'lishi mumkin.

Demak:

$$Q(x) \equiv 0 \rightarrow P(x) = x$$

Isbot tugadi.

Metodik izoh

Bu masala:

- murakkab hisob talab qilmaydi
- lekin **g'oyani ko'ra bilish** talab qiladi

O'quvchi shuni o'rganadi:

ko'phadni topish emas, **farqni nolga aylantirish** muhim.

6.4. LAGRANGE INTERPOLATSIYASI (FORMULA KERAK EMAS)

Maktabda Lagrange formulasi ko'pincha:

- murakkab
- yodlash uchun noqulay

Olimpiadada esa:

**formulani yodlash shart emas,
g'oyani ishlatish kifoya.**

G'oya:

- berilgan nuqtalarga mos keladigan ko'phad **bitta**
- agar topilgan ifoda shu nuqtalarda mos kelsa $\rightarrow$ yetarli

6.5. KLASSIK OLIMPIADA MISOLI 2

(aldovli interpolatsiya)

Masala

$P(x)$ darajasi $\leq n$ bo'lgan ko'phad.

Isbotlang:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C(n, k) P(k) = 0$$

Yechim (chuqur tahlil)

Quyidagi ko'phadni qaraymiz:

$$F(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C(n, k) (x - k)^n$$

Bu ko'phadning darajasi $\leq n$,

lekin u:

$$x = 0, 1, 2, \dots, n$$

nuqtalarda nolga teng.

Shuning uchun:

$$F(x) \equiv 0$$

Endi $x = P(k)$ qo'lyapmiz degan g'oya ostida liniyarlik ishlaydi va yig'indi nol chiqadi.

Bu yuqori darajadagi masala bo'lib, darsda **g'oyani ajratib berish muhim**.

6.6. INTERPOLATSIYA + VIYET / BAHOLASH

Interpolatsiya ko'pincha:

- Viyet bilan
- baholash bilan
- qarama-qarshilik bilan

qo'shilib keladi.

6.7. KLASSIK OLIMPIADA MISOLI 3

(**noto'g'ri ko'phad mavjud emasligini ko'rsatish**)

Masala

Darajasi ≤ 5 bo'lgan ko'phad mavjud emasligini ko'rsating, agar:

$$P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = 1$$

Yechim

Avval quyidagini olamiz:

$$Q(x) = P(x) - 1$$

U holda:

$$Q(0) = Q(1) = \dots = Q(5) = 0$$

Ammo:

$$\deg Q \leq 5$$

6 ta turli nuqtada nolga teng bo'lgan nolmas ko'phad bo'lishi mumkin emas.

Demak:

$$Q(x) \equiv 0$$

va:

$$P(x) \equiv 1$$

Lekin bunday ko'phadning darajasi 0 bo'ladi — 5 emas.

Qarama-qarshilik.

6.8. O'QITUVCHI UCHUN METODIK YO'NALISH

“Formula orqali topaman” degan fikrni yo‘qotish
Farq ko‘phadini qurish refleks bo‘lishi kerak
Ko‘p nuqtada nol — signal
Interpolatsiya — olimpiadada eng kuchli usullardan biri
Hisobsiz, lekin mantiqiy fikrlashni kuchaytiradi

6.9. 6-BO‘LIM XULOSASI

- Ko‘phad $n+1$ nuqtada aniqlansa — yagona
- Farq qurish ko‘p masalani “ochadi”
- Lagrange g‘oyasi formuladan muhimroq
- Qarama-qarshi yo‘l juda samarali
- Olimpiada darajasida juda ko‘p ishlatiladi

7-BO‘LIM. FUNKSIONAL TENGLAMALARNI KO‘PHADGA KELTIRISH

“Funksiya yashirincha ko‘phad bo‘lib chiqadi”

7.1. Asosiy g‘oya

Ko‘plab funksional tenglamalar tashqi ko‘rinishda:

- murakkab
- chalkash
- “har qanday funksiya”ga o‘xshaydi

Lekin chuqur tahlilda:

funksiya **faqat ko‘phad bo‘lishi mumkin**

Bo‘limning markaziy savoli:

QACHON funksiya majburan ko‘phadga aylanadi?

7.2. KO‘PHADGA MAJBURLOVCHI BELGILAR

Quyidagi belgilar uchrasa — **signal**:

$f(x + y)$ ko‘rinishidagi tenglama
 $f(x)$ ga algebraik shartlar bog‘langan

funksiya butun sonlarda yoki ko'p nuqtada berilgan baholash va chegaralash mavjud

Bu hollarda ko'pincha:

- $f(x)$ ko'phad
- yoki undan ham qat'iyroq: **darajasi cheklangan ko'phad**

7.3. ENG MUHIM TEXNIKA

Agar f funksiyani tekshirish qiyin bo'lsa, qaraymiz:

$$g(x) = f(x+1) - f(x)$$

Agar:

- $g(x)$ soddaroq bo'lsa
- yoki cheklangan darajali ko'rinishga kelsa

induksiya bilan $f(x)$ ko'phad ekanini ko'rsatish mumkin.

7.4. KLASSIK OLIMPIADA MISOLI 1

(funksiya majburan ko'phad)

Masala

$f : R \rightarrow R$ funksiya shundayki:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy \quad \text{barcha } x, y \in R \text{ va } f(0) = 0$$

Funksiyani toping.

Yechim

Avvalo $x = y = 0$: $f(0) = 2f(0) + 0 \rightarrow f(0) = 0$ mos keladi.

Endi $y = 0$:

$$f(x) = f(x) + f(0) + 0$$

mos.

Endi f ning ko‘rinishini taxmin qilamiz. Sababi:

- tenglama simmetrik
- o‘ng tomonda $2xy$ ko‘phad

Taxmin: $f(x) = ax^2 + bx$

Tekshiramiz: $f(x + y) = a(x + y)^2 + b(x + y) = ax^2 + ay^2 + 2axy + bx + by$

O‘ng tomon: $f(x) + f(y) + 2xy = ax^2 + bx + ay^2 + by + 2xy$

Taqqoslaymiz: $2a = 2 \rightarrow a = 1$

Demak: $f(x) = x^2 + bx$

$f(0) = 0$ sharti bilan ham mos.

Yakun: $f(x) = x^2 + bx$

(b — ixtiyoriy haqiqiy son)

Metodik izoh

Bu masalada:

- formulani topish emas
- **nega boshqa funksiya bo‘la olmaydi?**
g‘oyasi muhim.

7.5. KLASSIK OLIMPIADA MISOLI 2

(butun qiymatlarda ko‘phadlik)

Masala

$f : Z \rightarrow Z$ funksiya: $f(n + 2) - 2f(n + 1) + f(n) = 2$ barcha $n \in Z$

Funksiyani toping.

Yechim

Bu — **ikkinchi tartibli farq tenglama**.

Ma'lum: $\Delta^2 f(n) = 2$

Bu shuni bildiradiki:

- $f(n)$ kvadrat ko'phad

Demak: $f(n) = an^2 + bn + c$

Hisoblab qo'yamiz: $f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 2a$

Shundan: $2a = 2 \rightarrow a = 1$

Demak: $f(n) = n^2 + bn + c$

Metodik izoh

Bu masala:

- farqlar
- induksiya
- ko'phadlik

uchalasini bog'laydi.

7.6. INTERPOLATSIYA ORQALI FUNKSIYA TOPISH

Agar:

- $f(x)$ bir necha nuqtada berilgan
- yuqori darajadagi xatti-harakat cheklangan bo'lsa

f interpolatsiya orqali topiladi.

Masalan:

$$f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 4$$

va funksiya kvadrat bo'lishi majburiy $\rightarrow$

$$f(x) = x^2$$

7.7. KLASSIK OLIMPIADA MISOLI 3

(funksiya mavjud emasligini ko'rsatish)

Masala

Haqiqiy funksiyani topish mumkin emasligini isbotlang, agar:

$$f(x + y) = f(x)f(y) \text{ va } f(x) = x^2 \text{ barcha } x \text{ uchun}$$

Yechim

$$\text{Agar: } f(x) = x^2 \text{ bo'lsa, unda: } f(x + y) = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$\text{Lekin: } f(x)f(y) = x^2y^2$$

Bu ikkisi teng emas. Qarama-qarshilik.

Demak bunday funksiya mavjud emas.

7.8. O'QITUVCHI UCHUN METODIK YO'NALISH

Funksional tenglamada "farq" izlash

Qachon ko'phad chiqishi majburiyligini sezish

Interpolatsiyani refleksga aylantirish

"Mavjud emas" xulosasidan qo'rqmaslik

Bu bo'lim – ko'phad mavzusining cho'qqisi