

MUSTAQIL ISHLASH UCHUN MISOLLAR

1-masala.

Darajasi ≤ 5 bo'lgan ko'phad $P(x)$ uchun:

$$P(x+1) = P(x) \quad \text{barcha } x \text{ uchun}$$

Isbotlang:

$$P(x) \equiv \text{const}$$

Yechim

Qaraymiz:

$$Q(x) = P(x+1) - P(x)$$

Shartdan:

$$Q(x) \equiv 0$$

Ammo $Q(x)$ — darajasi ≤ 4 bo'lgan ko'phad.

Ko'phad nol bo'lishi uchun **hamma koeffitsiyentlari nol** bo'lishi kerak.

Demak $P(x)$ o'zgarmas.

2-masala.

$P(x)$ darajasi ≤ 6 bo'lib:

$$P(x) + P(-x) = 2x^4$$

barcha x uchun.

$P(x)$ ni toping.

Yechim

Yozamiz:

$$P(x) = A(x) + B(x)$$

bu yerda:

- $A(x)$ — juft ko'phad

- $B(x)$ — toq ko'phad

Unda:

$$P(x) + P(-x) = 2A(x)$$

Demak:

$$A(x) = x^4$$

Shunday qilib:

$$P(x) = x^4 + B(x)$$

bu yerda $B(x)$ — darajasi ≤ 5 bo'lgan ixtiyoriy toq ko'phad.

3-masala.

Darajasi ≤ 4 bo'lgan ko'phad $P(x)$ uchun:

$$P(0) = 0, \quad P(1) = 1, \quad P(2) = 4, \quad P(3) = 9, \quad P(4) = 16$$

Topping $P(x)$.

Yechim

Qiymatlar:

$$0, 1, 4, 9, 16 = x^2$$

Qaraymiz:

$$Q(x) = P(x) - x^2$$

Unda:

$$Q(0) = Q(1) = Q(2) = Q(3) = Q(4) = 0$$

Lekin $\deg Q \leq 4$ va 5 ta ildiz mavjud.

Demak:

$$Q(x) \equiv 0$$

Natija: $P(x) = x^2$

4-masala.

$P(x)$ — darajasi n boʻlgan, yetakchi koeffitsiyenti 1.

Isbotlang:

$$|P(-1)| + |P(0)| + |P(1)| \geq 1$$

Yechim

Agar barchasi < 1 boʻlsa, u holda:

- koʻphad $-1, 0, 1$ da kichik
- bu holda ildizlar juda yaqin joylashadi

Bu **koʻphad konsentratsiyasiga** zid.

Shuning uchun kamida bittasi ≥ 1 .

5-masala.

$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$,
 $|a_i| \leq 2$ boʻlsa, isbotlang:

$$|P(1)| \leq 2(n+1)$$

Yechim

Yozamiz:

$$P(1) = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

Uchburchak tengsizlikdan:

$$|P(1)| \leq |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n| \leq 2(n+1)$$

6-masala

$P(x)$ — barcha koeffitsiyentlari musbat boʻlgan koʻphad.

Isbotlang:

$P(x) = 0$ tenglama musbat ildizga ega emas

Yechim

Agar $x > 0$ bo'lsa, har bir had:

$$a_i x^i > 0$$

Shuning uchun:

$$P(x) > 0$$

Demak nol bo'la olmaydi.

7-masala. (simmetriyani majburlash)

$P(x)$ darajasi ≤ 5 bo'lib:

$$P(x) = P(2 - x)$$

bo'lsa, $P(x)$ qanday ko'rinishda bo'ladi?

Yechim

Invariant:

$$x(2 - x)$$

Shuning uchun:

$$P(x) = Q(x(2 - x))$$

bu yerda Q — darajasi ≤ 2 bo'lgan ko'phad.

8-masala.

$a_n = P(n)$, bu yerda P — kvadrat ko'phad.

Agar:

$$a_1 = 3, a_2 = 7, a_3 = 13$$

bo'lsa, a_4 ni toping.

Yechim

Farqlarni hisoblaymiz:

$$3 \rightarrow 7 (+4)$$

$$7 \rightarrow 13 (+6)$$

Ikkinchi farq = 2 $\rightarrow$ kvadrat ko'phad.

Demak:

keyingi farq = 8

Shu sabab:

$$a_4 = 13 + 8 = 21$$

9-masala.

Darajasi ≤ 3 bo'lgan ko'phad mavjud emasligini ko'rsating, agar:

$$P(0) = 0, P(1) = 0, P(2) = 1, P(3) = 1$$

Yechim

Qaraymiz:

$$Q(x) = P(x) - x^2/2 + (x/2)$$

Unda:

$$Q(0) = Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0$$

Lekin $\deg Q \leq 3$ va 4 ta ildiz mavjud — imkonsiz.

10-masala. (funksiya $\rightarrow$ ko'phad)

$f : R \rightarrow R$ funksiya:

$$f(x+1) - f(x) = 2x + 1$$

va

$$f(0) = 1$$

Funksiyani toping.

Yechim

Farq kvadratik o'smoqda $\rightarrow f$ kvadrat ko'phad.

Farq integrali:

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

Tekshiruv:

$$f(x+1) - f(x) = 2x + 1$$

Natija: $f(x) = x^2 + x + 1$