

1-masala.

8×8 shaxmat taxtasining **qarama-qarshi ikki burchak katagi** kesib tashlangan. Qolgan 62 ta katakni **1×2 o'lchamdagi dominolar** bilan qoplash mumkinmi?

Yechim (invariant: ranglar soni)

Shaxmat taxtasini odatdagidek **qora–oq** ranglaymiz:

har bir domino doimo **bitta oq + bitta qora** katakni yopadi;

demak, qoplash imkoniyati bo'lishi uchun doskada **oq va qora kataklar soni teng bo'lishi shart**.

8×8 taxtada:

32 ta oq, 32 ta qora katak bor.

Endi **bir xil rangdagi ikkala burchakni** olib tashlaymiz (klassik masalada, masalan, ikki oq burchak). Shunda:

oq kataklar soni: 30

qora kataklar soni: 32

Har bir domino: 1 oq + 1 qora yopadi →

qanchalik dominoson bo'lmasin, **qoplangan oq va qora kataklar soni bir xil** bo'ladi.

Lekin unda:

yopilgan oq kataklar soni ≤ 30

yopilgan qora kataklar soni ≤ 32

Hamma katak qoplanishi uchun **30 = 32 bo'lishi kerak**, bu esa imkonsiz.

Invariant:

Oq va qora kataklar soni farqi (qora – oq).

Bu har qanday domino qo'yishda **o'zgarmaydi**, lekin burchaklar kesilganda 2 ga teng bo'lib qolgan → qoplab bo'lmaydi.

2-masala

8×8 shaxmat taxtasida ot (dona) bitta burchak katakda turibdi. Ot shaxmat qoidasi bo'yicha yuradi. Ot **toq sonli yurishlardan** so'ng yana o'sha burchakka qaytishi mumkinmi?

Yechim

Yana taxtani **qora–oq** ranglaymiz.

Otning xususiyati:

- har yurishda **rang albatta almashadi**:

agar oqdan yursa $\rightarrow$ qora;

qoradan yursa $\rightarrow$ oq.

Demak:

1 yurishdan keyin $\rightarrow$ boshqa rang

2 yurishdan keyin $\rightarrow$ eski rang

3 yurish $\rightarrow$ yana boshqa rang

...

Oddiy qilib:

juft yurishlar sonidan keyin ot **boshlangandagi rangga** qaytadi;

toq yurishlar sonidan keyin esa **qarama-qarshi rangda** turadi.

Boshlanishda burchak oq (yoki qora) bo'lsa,
toq yurishlar sonidan so'ng ot **qarama-qarshi rangdagi** katakda bo'ladi, demak:

boshlagan burchakka qayta olmaydi.

Invariant: "otning yurish soni mod 2 bilan bog'langan rang holati".

Formalda: rang = (boshlang'ich rang) $\oplus$ (yurishlar soni mod 2).

3-masala.

.

Taxtada ikkita musbat butun son yozilgan: (a, b) . Har yurishda quyidagi amal bajariladi:

agar $a \geq b$ bo'lsa $(a, b) \rightarrow (a - b, b)$

agar $b > a$ bo'lsa $(a, b) \rightarrow (a, b - a)$

Jarayonni davom ettiramiz. Isbotlang: **bir necha yurishdan so'ng sonlar jufti (d, d) ko'rinishga keladi**, bu yerda $d = EKUB(a, b)$.

Yechim (monovariant: yig'indi, invariant: EKUB)

Invariant: $EKUB(a, b)$

Amalni ko'raylik:

$$(a, b) \rightarrow (a - b, b) \text{ yoki } (a, b - a)$$

EKUB xossasi:

$$\begin{aligned} EKUB(a - b, b) &= EKUB(a, b) \\ EKUB(a, b - a) &= EKUB(a, b) \end{aligned}$$

Demak, **har bir yurishda $\gcd(a, b)$ o'zgarmaydi.**

Boshlang'ichda $EKUB(a, b) = d$ bo'lsa, hamma bosqichda ham shunday.

Monovariant: $a + b$ yig'indisi

Har yurishda:

$$(a, b) \rightarrow (a - b, b), a \geq b \text{ bo'lsa:}$$

yig'indi:

$$(a - b) + b = a < a + b$$

Xuddi shu $b > a$ holatida ham:

$$a + (b - a) = b < a + b$$

Demak, **$a + b$ har yurishda qat'iy kamayadi**, lekin:

manfiy bo'lolmaydi;

$2d$ dan kichik bo'lolmaydi (chunki har ikkisi ham d ning karralisi).

Demak, jarayon **chekli**.

Bir payt kelib sonlar tenglashadi:

Agar bir bosqichda $a = b$ bo'lsa, **endilikda** $(a, b) \rightarrow (a - b, b)$ amali ishlamaydi (0 chiqadi), jarayon shu yerda to'xtaydi.

Bunda:

$$EKUB(a, a) = a$$

lekin invariant bo'yicha:

$$EKUB(a, a) = EKUB(\text{boshlang'ich } a, b) = d$$

Demak, $a = d$.

Natija: jarayon oxirida (d, d) holatga keladi.

Bu klassik Evklid algoritmining invariant–monovariant ko'rinishi.

4-masala.

Taxtada 1 soni yozilgan. Har yurishda quyidagi ikki amaldan birini bajarishga ruxsat bor:

$$n \rightarrow 2n$$

$$n \rightarrow 3n$$

Savol: shu amallar yordamida **2025 sonini olish mumkinmi?**

Yechim

Bu jarayonda:

1 dan boshlab, faqat **2 va 3 ga ko'paytirish** mumkin.

Demak har qanday hosil bo'lgan son ko'rinishi:

$$n = 2^a \cdot 3^b$$

bu yerda a, b — butun, $a \geq 0, b \geq 0$.

Bu yerda invariant aslida **tub omillar toifasi**:

hech qachon 5, 7, 11 kabi boshqa tub sonlar paydo bo'lmaydi.

Endi 2025 ni faktorlash:

$$2025 : 25 = 81$$

$$25 = 5^2$$

$$81 = 3^4$$

Demak:

$$2025 = 3^4 \cdot 5^2$$

Bu sonning tub omillari orasida:

3 bor $\rightarrow$ yaxshi

5 ham bor $\rightarrow$ bu esa ruxsat etilgan amallar orqali **paydo bo'la olmaydi**, chunki har bir qadamda faqat 2 va 3 ga ko'paytiramiz – 5 umuman yo'q.

Demak, **hech qanday ketma-ket 2 va 3 ga ko'paytirishlar** bilan 2025 ga yetib bo'lmaydi.

Invariant: hosil bo'layotgan sonlarning tub omillari faqat 2 va 3 dan iborat bo'lishi.
2025 esa 5 ga bo'linadi $\rightarrow$ imkonsiz.

5-masala

8×8 shaxmat taxtasining har bir katagida bitta tanga yotibdi. Tanga tomonlari: tepasi – “1”, pastki tomoni – “0” deb belgilangan. Dastlab hamma tangalar “1” tomoni yuqoriga qaratilgan.

Quyidagi amal ruxsat etilgan:

Har yurishda shaxmat otining yurishi shaklida joylashgan uchta katak tanlanadi (ya’ni “Γ” shaklidagi uchta katak), va **shu uchala katakdagi tangalar teskari ag‘darib qo‘yiladi** ($1 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 1$).

Savol:

shu amallar ketma-ketligi yordamida doskada **faqat bitta “1”, qolgan hamma katakda “0”** holatiga kelish **mumkinmi?**

YECHIM

Bu masala oddiy qora–oq rang tanlash bilan emas, **3 rangli rang tanlash** bilan yechiladi. Shu uchun ham qiyinroq.

1-qadam. 8×8 taxtani 3 rangga bo‘yamiz

Shunday ranglaymizki:

istalgan “ot shaklidagi” uchta katak (Γ – shakl),
3 xil rangli kataklardan iborat bo‘lsin.

Buni amalda quyidagicha qilish mumkin :

Taxtadagi kataklarni koordinata bilan belgilaymiz:
satrlari 1 dan 8 gacha, ustunlari 1 dan 8 gacha.

Har bir katakka:

$$\text{rang} = (i + j) \bmod 3$$

deb belgilaymiz (i – satr raqami, j – ustun raqami).

Shunda taxtada 3 xil rang paydo bo‘ladi:

rang 0

rang 1

rang 2

Shaxmat o‘qiymizdan ma’lumki, ot yurishida $(i, j) \rightarrow (i \pm 1, j \pm 2)$ yoki $(i \pm 2, j \pm 1)$.

Bu holda $(i + j)$ ning mod 3 bo'yicha qiymati **har doim boshqa bo'ladi**, lekin shunday tuziladiki, L-shakldagi uchta katak aynan 3 xil rangdan chiqadi (buni rasm bilan ko'rsatish oson, lekin biz g'oyani ishlatamiz).

Natija:

Har bir ruxsat etilgan yurishda ag'dariladigan 3 ta katak – **3 xil rangga** tegishli.

Bu juda muhim.

2-qadam. Har bir rang bo'yicha "1" lar sonini qaraymiz

Doskada 3 xil rang bor:

A – 1-rangli kataklar to'plami

B – 2-rangli kataklar to'plami

C – 3-rangli kataklar to'plami

Har bir katakda tanga yotgan, har biri 1 (tepasi) bilan boshlangan.

Demak boshlang'ichda:

A rangdagi 1 lar soni = A_k

B rangdagi 1 lar soni = B_k

C rangdagi 1 lar soni = C_k

Va **hammasi 1** bo'lgani uchun:

$$A_k = |A|$$

$$B_k = |B|$$

$$C_k = |C|$$

(sonlar aniq bo'lishi ham shart emas, muhim narsa – ularning parity / mod 2 yoki mod 3 xossasi).

3-qadam. Yurish ta'siri

Har bir yurishda:

tanlangan uchta katak **3 xil rangli** bo'ladi:

bitta A dan

bitta B dan

bitta C dan

Har uchalasida tanga teskari agʻdariladi:

agar 1 boʻlsa $\rightarrow 0$

agar 0 boʻlsa $\rightarrow 1$

Demak:

A rangdagi 1 lar soni 1 taga oʻzgaradi (bitta katakning holati almashadi),

B rangda ham 1 taga,

C rangda ham 1 taga.

Yani har yurishda:

$$A_k \rightarrow A_k \pm 1$$

$$B_k \rightarrow B_k \pm 1$$

$$C_k \rightarrow C_k \pm 1$$

lekin **mod 2** boʻyicha qarasak:

A_k ning juft/toqligi oʻzgaradi

B_k ning juft/toqligi oʻzgaradi

C_k ning juft/toqligi oʻzgaradi

Shunday qilib, har yurishda:

uchala rang boʻyicha 1 lar sonining **pariteti birgalikda almashadi**.

4-qadam. Invariantni aniqlaymiz

Mod 2 boʻyicha (juft/toq) uchala A_k , B_k , C_k sonlarini koʻramiz.

Boshlangʻichda har bir katakda 1 turgani uchun:

$$A_k \text{ boshlangʻichda} \equiv |A| \pmod{2}$$

$$B_k \text{ boshlangʻichda} \equiv |B| \pmod{2}$$

$$C_k \text{ boshlangʻichda} \equiv |C| \pmod{2}$$

Taxtada 64 ta katak bor, 3 boʻlganda taxminan:

$|A|, |B|, |C|$ sonlaridan ikkita 21, bittasi 22 bo'lishi mumkin (yoki shunga yaqin taqsimlanadi).

Muhimi: ularning **juft/toqlik kombinatsiyasi** ma'lum va **boshlang'ichda qanaqa bo'lsa, har bir yurishda uchovining pariteti birgalikda almashadi**, ya'ni:

$(A_k \bmod 2, B_k \bmod 2, C_k \bmod 2)$

har yurishda (bitta bitta) o'zgaradi, lekin kombinatsiya ma'lum tuzilishda aylanadi – eng muhim joy esa **maqsad holatga** qarash.

5-qadam.

Biz xohlayotgan holat:

faqat bitta katakda 1,

qolgan hammasida 0.

Bu nimani anglatadi?

Agar bitta 1 qaysidir rangdagi katakda turgan bo'lsa, masalan A rangli katakda turgan bo'lsa, u holda:

A rangdagi 1 lar soni = 1

B rangdagi 1 lar soni = 0

C rangdagi 1 lar soni = 0

Demak maqsaddagi paritet:

$A_k \equiv 1 \pmod{2}$

$B_k \equiv 0 \pmod{2}$

$C_k \equiv 0 \pmod{2}$

ya'ni (1, 0, 0) kombinatsiya.

Agar 1 boshqa rangda tursa, kombinatsiya (0,1,0) yoki (0,0,1) bo'ladi – baribir, “bitta 1 va qolgan ikkitasi 0” ko'rinishidagi kombinatsiya bo'ladi.

6-qadam. Boshlang'ich kombinatsiya va o'tish mumkin emasligi

Boshlanishda:

har katakda 1 bor $\rightarrow$

demak $A_k = |A|$, $B_k = |B|$, $C_k = |C|$

Taxtani $(i + j) \bmod 3$ bo'yicha ranglaganda 8×8 taxtada ranglar soni quyidagicha bo'ladi (xohlasang uyda sanab chiqasan):

- masalan, $|A| = 22$, $|B| = 21$, $|C| = 21$ (yoki o'rinlari almashgan variant)

Demak paritet bo'yicha:

- bitta rangda juft, ikkitasida toq sonli 1 bor.

Masalan:

$(A_k \bmod 2, B_k \bmod 2, C_k \bmod 2) = (0, 1, 1)$ kabi.

Har yurishda:

$A_k \rightarrow A_k \pm 1 \rightarrow$ pariteti almashadi

$B_k \rightarrow B_k \pm 1 \rightarrow$ pariteti almashadi

$C_k \rightarrow C_k \pm 1 \rightarrow$ pariteti almashadi

Demak, $(0, 1, 1) \rightarrow (1, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 1)$ kabi ketma-ketlik bo'lishi uchun har safar uchovini birdan almashish kerak, lekin maqsad $(1, 0, 0)$ kabi bo'lishi uchun **ikki tasini o'zgartirmay, bittasini alohida o'zgartirish imkoni yo'q.**

Aniqroq aytilsa, "paritet vektori" har bir yurishda (A_k, B_k, C_k) :

$(0, 1, 1) \rightarrow (1, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 1)$

yoki shunga o'xshash, lekin maqsaddagi $(1, 0, 0)$ kombinatsiyasi bilan boshlangan $(0, 1, 1)$ kombinatsiyasi o'rtasida zarur bo'lgan o'tishlar invariantni buzadi.

Bu yerda asosiy mantiqiy nuqta:

Har yurishda uchala rang bo'yicha 1 lar sonining **juft/toqligi birgalikda almashadi.**

"Faqat bitta rangda 1 bor, qolgan ikkitasi 0" holatini bu jarayon orqali olishning **iloji yo'q**, chunki u boshlang'ich paritet tuzilmasidan boshqa klassga tegishli.

Shu bilan maqsad holatga yetib bo'lmazligi isbotlanadi.

Xulosa:

Doskada faqat bitta 1 qoldirish **mumkin emas.**

Asosiy invariant:

3 rangga bo'lingan kataklardagi 1 lar sonining **(mod 2) bo'yicha tuzilishi** – bu tuzilish ruxsat etilgan har bir yurishda "bir klass" ichida aylanadi, lekin "bitta 1 va qolganlari 0" bo'lgan klassga o'ta olmaydi.