

1. ODDIY INDUKSIYANI TO'G'RI O'RGATISH

(Olimpiada darajasiga asos qo'yish)

1.1. Bo'limning asosiy maqsadi

Bu bo'lim oxirida o'quvchi:

induksiya **mexanik andoza emas**,

balki **zanjirli mantiqiy isbot** ekanini tushunishi kerak.

O'qituvchi maqsadi:

“asos + qadam”ni yozdirish emas,

nega aynan shu qadam ishlayotganini anglatish.

1.2. Oddiy induksiyaning to'g'ri ta'rifi

Isbotlanadigan mulohaza:

$$P(n) \quad (n \in N)$$

Induksiya ikki qismdan iborat.

1. Asos (baza): $P(1)$ to'g'ri ekanini tekshirish
2. Induksiya qadami: Agar $P(n)$ to'g'ri bo'lsa, u holda $P(n + 1)$ ham to'g'ri

Shundan xulosa:

$$P(1), P(2), P(3), \dots$$

hammasi to'g'ri.

1.3. METODIK MUHIM NUQTA (ko'p joyda xato qilinadi)

Ko'pchilik o'quvchi shunday o'ylaydi:

“ $P(n)$ to'g'ri bo'lsa, demak $P(n + 1)$ ham to'g'ri”

Bu **xato fikr**.

To'g'ri mantiq:

“Agar bizga $P(n)$ to'g'ri deb QABUL QILISHGA ruxsat berilsa, undan $P(n + 1)$ ni isbotlay olishimiz kerak.”

Ya'ni:

- $P(n)$ — **faraz**
- $P(n + 1)$ — **xulosa**

1.4. Darsni qanday boshlash kerak?

Tavsiya:

darsni **noto'g'ri induksiya** bilan boshlash.

Klassik noto'g'ri “isbot”

Da'vo:

“Barcha otlar bir xil rangda”.

Soxta “isbot”:

- 1 ta otli to'plamda ranglar bir xil
- n ta otli to'plamda bir xil rangli bo'lsa
- $n+1$ ta otli to'plamni ikkiga bo'lib, har ikkisi n ta — rang bir xil ✗

Bu yerda **n dan $n+1$ ga o'tishda uzilish bor.**

Metodik jihatdan olingan natija:

- o'quvchi induksiya **har doim ishlamasligini** tushunadi
- induksiya qadamini **tekshiradigan odat** hosil bo'ladi

1.5. Oddiy, lekin TO'G'RI misol (darslik emas, tushuntiruvchi)

Masala 1

Isbotlang: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Yechim (to'g'ri metodik uslubda)

Asos:

$$\begin{aligned}n &= 1 \\1 &= 1 \cdot \frac{2}{2}\end{aligned}$$

to'g'ri

Induksiya farazi: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Induksiya qadami: $1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1)$

O'ng tomonni soddalashtiramiz:

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Bu esa aynan formula: $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Demak $P(n+1)$ bajarildi.

1.6. O'QITUVCHI UCHUN MUHIM SAVOLLAR

(darsda berib borish kerak)

- “Qaysi joyda $P(n)$ dan foydalandik?”
- “Agar formulani bilmasak, qayerdan chiqardi?”
- “Bu qadamda boshqa yo'l bormi?”

Bu savollar:

- ko'r-ko'rona yodlashni yo'q qiladi
- olimpiada mantiqini shakllantiradi

1.7. Oddiy induksiya QAERDA YETMAYDI?

O'quvchiga shuni aytish kerak:

- agar $P(n + 1)$ ni isbotlashda faqat $P(n)$ emas, balki $P(n - 1)$, $P(n - 2)$ ham kerak bo'lsa → **oddiy induksiya yetmaydi**

Bu bizni **2-bo'lim: kuchli induksiya**ga olib keladi.

Bu bog'lanishni albatta aytib o'ting:

“Agar ichingizda shunday savol tug'lsa — demak kuchli induksiya keldi”.

1.8. 1-BO'LIM XULOSASI (o'qituvchi uchun)

Oddiy induksiya:

- formula emas
- mantiqiy mexanizm

Asosni tekshirish — yetarli emas, asos **nega tanlangani** tushuntirilishi kerak.

Induksiya qadami — darsning yuragi.

Noto'g'ri induksiya misoli — juda foydali pedagogik vosita.

2-BO'LIM. KUCHLI INDUKSIYA

Olimpiada darajasida o'qitish metodikasi

2.1. Bo'limning asosiy g'oyasi

Kuchli induksiya — bu:

- oddiy induksiyadan **boshqa usul** emas,
- balki **farazni kuchaytirish**.

Oddiy induksiya: $P(n) \rightarrow P(n + 1)$

Kuchli induksiya: $P(1), P(2), \dots, P(n) \rightarrow P(n + 1)$

Ya'ni $P(n + 1)$ ni isbotlashda **faqat bitta oldingi holat emas, 1 dan n gacha bo'lgan hamma holatlardan foydalanish mumkin.**

2.2. Nega kuchli induksiya kerak bo'ladi?

Asosiy belgi (o'qituvchi uchun signal)

Agar o'quvchi $P(n + 1)$ ni yozayotib shunday desa:

- “Bu yerda $P(n - 1)$ ham kerak ekan...”
- “Bu son kichik bo'laklarga ajraladi...”

→ bu 90% hollarda **kuchli induksiya**.

2.3. Metodik xato va uni tuzatish

Keng tarqalgan xato

O'quvchi:

“ $P(n + 1)$ ni isbotlayman, chunki $P(n)$ va undan oldingilar to'g'ri”.

Bu **yetarli emas**.

To'g'ri yozish madaniyati

Induksiya farazi:

$P(k)$ barcha $k = 1, 2, \dots, n$ lar uchun bajarilgan deb olamiz.

Induksiya qadami:

Endi $P(n + 1)$ ni isbotlaymiz.

Bu yozuv:

- mantiqni to'liq qiladi
- olimpiadada juda muhim

2.4. KLASSIK MISOL (kuchli induksiya majburiy)

Masala 1

Isbotlang:

Har bir $n \geq 2$ natural son **tub sonlar ko'paytmasi** ko'rinishida yoziladi.

Bu — Arifmetikaning asosiy teoremasining bir qismi.

Yechim (metodik to'g'ri uslubda)

Induksiya qilinadigan mulohaza:

$P(n)$: n soni tub sonlar ko'paytmasi ko'rinishida yoziladi ($n \geq 2$).

Asos: $n = 2$

2 — tub son, demak shart bajarildi.

Induksiya farazi: $2 \leq k \leq n$ bo'lgan barcha k lar uchun $P(k)$ to'g'ri.

Induksiya qadami ($n + 1$):

Agar:

- $n + 1$ tub bo'lsa $\rightarrow$ tayyor
- aks holda: $n + 1 = a \cdot b$

bu yerda: $2 \leq a \leq n, 2 \leq b \leq n$

Induksiya farazi bo'yicha:

- a tub sonlar ko'paytmasi
- b tub sonlar ko'paytmasi

Demak: $n + 1 = (\text{tub sonlar ko'paytmasi})$

Isbot tugadi.

Metodik izoh (JUDA MUHIM)

Bu masalani **oddiy induksiya bilan qilish inkonsiz**.

Chunki:

- $n + 1$ ni hosil qilish uchun n emas
- n dan kichik **a va b** lar kerak bo'ldi.

O'quvchiga albatta shu joy urg'ulanadi.

2.5. Yana bir tipik olimpiada misoli

Masala 2

Isbotlang:

Har bir $n \geq 2$ sonni uzunligi 2 dan katta bo'lmagan kesmalar bilan yopish mumkin.

(masala mazmuni: konstruktiv bo'lishi ham mumkin, kuchli induksiya talab etadi)

Metodik yechim g'oyasi

- kichik n larni alohida tekshiramiz
- $n + 1$ holatda:

$n - 1$ yoki $n - 2$ holatga qaytamiz

→ oddiy induksiya yetmaydi

Bu masalalar kuchli induksiya uchun **ideal mashq**.

2.6. Qaysi joyda o'quvchi adashadi?

Tipik xatolar:

1. Faqat: $P(n) \rightarrow P(n + 1)$

deb yozib qo'yadi

2) Qaysi k lar uchun faraz qilganini yozmaydi

3) Farazni ishlatgan joyini ko'rsatmaydi

2.7. O'QITUVCHI UCHUN DARS METODIKASI

Tavsiya etilgan dars ketma-ketligi

1. Oddiy induksiya bilan qilib bo'lmaydigan masala tashlang
2. O'quvchi qiynalsin (normal)
3. So'rang:

- o “Qaysi oldingi holatlar kerak bo‘lyapti?”
4. Shundan keyin:
- o kuchli induksiya kiritiladi

Bu usul:

- kuchli induksiya **sun’iy emas**ligini ko‘rsatadi
 - o‘quvchi o‘zi ehtiyoj sezadi
-

2.8. Oddiy va Kuchli induksiya (taqqoslash)

Oddiy induksiya:

- faqat $P(n)$ kerak
- formulalar uchun qulay

Kuchli induksiya:

- $P(1) \dots P(n)$ ishlatiladi
- faktorizatsiya, bo‘linish masalalari uchun shart

Metodik jihatdan:

- kuchli induksiya — keyingi bosqich

2.9. 2-BO‘LIM XULOSASI

Kuchli induksiya — induksiyaning kuchaytirilgan shakli
Olimpiada masalalarida juda ko‘p uchraydi
“ $n + 1$ ni isbotlashda n yetmayapti” degan joy — signal
To‘g‘ri yozish madaniyati o‘rgatilishi shart

3-BO‘LIM. KONSTRUKTIV INDUKSIYA

“Mavjud”ni emas, qanday qurilishini ko‘rsatish

3.1. Bo‘limning asosiy g‘oyasi

Oddiy/kuchli induksiya ko‘pincha shuni aytadi:

“bunday n uchun mavjud”

Konstruktiv induksiya esa shuni talab qiladi:

“qanday qilib hosil qilinadi?”

Ya’ni bu bo‘limda induksiya:

- isbot usuli emas,
- **qurish algoritmi** vazifasini bajaradi.

3.2. Qachon konstruktiv induksiya kerak bo‘ladi?

Quyidagi so‘zlar uchrasa — **signal**:

- “qurish mumkinligini ko‘rsating”
- “har qanday n uchun mavjudligini ko‘rsating”
- “rekursiv tarzda hosil qiling”
- “bosqichma-bosqich yasash”

Agar induksiya qadamida:

- “ $n + 1$ ni oldingi holatdan qanday chiqaramiz?”
savoli tug‘ilsa $\rightarrow$ konstruktiv induksiya.

3.3. Keng tarqalgan metodik xato

Xato:

O‘quvchi yozadi:

“Induksiya farazi bo‘yicha mavjud, demak $n + 1$ uchun ham mavjud.”

Bu **olimpiadada qabul qilinmaydi.**

To‘g‘risi:

Induksiya qadamida **aniq harakat** ko‘rsatiladi:

- nimani qo‘shdik
- nimani o‘zgartirdik
- nima uchun shart saqlanib qoldi

3.4. Konstruktiv induksiyaning umumiy sxemasi

Har doim quyidagi 3 qadam ochiq yoziladi:

1. Asos: $n = n_0$ uchun obyektни aniq quramiz
2. Induksiya farazi: n uchun qurilgan obyekt mavjud deb olamiz
3. Induksiya qadami: $n + 1$ uchun obyektни n dagisidan qanday hosil qilishni ko'rsatamiz

Bu **muhim**: “mavjud” so‘zi yetarli emas, **qurilish yo‘li** bo‘lishi shart.

3.5. KLASSIK OLIMPIADA MISOLI (konstruktiv)

Masala 1

Isbotlang:

Har bir $n \geq 2$ uchun n uzunlikdagi zanjirni uzunligi 2 yoki 3 bo‘lgan bo‘laklar yordamida yopish mumkin.

Yechim (to‘liq konstruktiv, metodik)

Isbotlanadigan mulohaza:

$P(n)$: n uzunlikdagi zanjirni 2 va 3 uzunlikdagi bo‘laklar bilan yopish mumkin ($n \geq 2$).

Asos:

$n = 2 \rightarrow 2 = 2$ (bitta 2-bo‘lak)

$n = 3 \rightarrow 3 = 3$ (bitta 3-bo‘lak)

Asos to‘liq.

Induksiya farazi: $2 \leq k \leq n$ bo‘lgan barcha k lar uchun $P(k)$ to‘g‘ri.

Induksiya qadami ($n + 1$):

- Agar $(n + 1) - 2 \geq 2$ bo‘lsa, $n + 1$ ni oxiridan 2 bo‘lak olib tashlaymiz:

$$(n + 1) = (n - 1) + 2$$

Induksiya farazi bo‘yicha $(n - 1)$ yopiladi $\rightarrow$ oxiriga 2 qo‘shamiz.

- Aks holda, $(n + 1) - 3 \geq 2$ bo‘ladi: $(n + 1) = (n - 2) + 3$

Induksiya farazi bo‘yicha $(n - 2)$ yopiladi $\rightarrow$ oxiriga 3 qo‘shamiz.

Har ikki holatda ham **qanday qo‘shilgani aniq**.

Demak $P(n + 1)$ isbotlandi.

Metodik izoh

Bu masalada:

- oddiy induksiya ham
 - kuchli induksiya ham yetarli emas
- Agar **qanday qurilganini** ko‘rsatmasak.

3.6. Kombinatorik konstruktiv misol

Masala 2

n ta quti va n ta tosh bor. Har bir bosqichda bitta toshni bitta qutiga qo‘yib borib, hech qachon bir qutida 2 tadan ortiq tosh bo‘lmasligini ta’minlash mumkinligini ko‘rsating.

Yechim g‘oyasi (metodik)

- $n = 1$ da aniq
- n ga qurilgan joylashdan $n + 1$ ga o‘tishda:
 - bo‘sh qutiga yangi tosh qo‘shiladi

Bu yerda:

- “bo‘sh quti borligi” induksiya farazidan kelib chiqadi
- qadam **aniq harakat** bilan yopiladi

3.7. Konstruktiv induksiya + sonlar nazariyasi

Tipik masalalar

- bo‘linuvchanlik bilan rekursiv qurilmalar
- sonni kichik bo‘laklarga ajratib qayta qurish

Metodik maslahat

Induksiya qadamida:

- sonni **n** emas,
- **$n - a$** (kichikroq) ko‘rinishga o‘tkazing

Bu kuchli induksiya bilan tabiiy bog‘lanadi.

3.8. O‘QITUVCHI UCHUN DARSNI QANDAY O‘TISH

Tavsiya etilgan usul

1. “Mavjudligini isbotlang” degan masala tashlang
2. O‘quvchi “induksiya farazi bo‘yicha mavjud” deb yozadi
3. To‘xtating va so‘rang:
 - o “qanday quriladi?”
4. Faqat shundan keyin konstruktiv induksiya tushuntiriladi

Bu o‘quvchini:

- yozma madaniyatga
- olimpiada talabiga moslaydi

3.9. 3-BO‘LIM XULOSASI

Konstruktiv induksiya — qurish san’ati
“Mavjud” yetarli emas
Har bir qadam — aniq operatsiya
Kuchli induksiya bilan ko‘p bog‘lanadi
Olimpiadada juda qadrlanadi

4-BO‘LIM. INDUKSIYA + TENGSIZLIKLAR

Induksiya qadamini “yopish” usuli

4.1. Bo‘limning asosiy muammosi

O‘quvchilar eng ko‘p aynan shu joyda qiynaladi.

Oddiy holat:

- $P(n)$ to'g'ri
- $P(n + 1)$ ni yozadi
- lekin tengsizlik **yopilmay qoladi**

Sabab:

- induksiya qadamida baholash yetarli emas
- $(n + 1)$ hadi noto'g'ri ajratilgan

4.2. Metodik tamoyil (asosiy qoida)

Induksiya + tengsizliklarda **oltin qoida**:

$P(n + 1)$ dagi ifodani

$P(n)$ ko'rinishidagi qism + musbat (yoki manfiy) qism ko'rinishiga keltir.

Ya'ni:

- umumiy hadni ajrat
- qolgan qismini **bahola**

4.3. Oddiy, lekin juda muhim texnika

Agar isbotlanadigan tengsizlik: $A(n) \geq B(n)$

ko'rinishda bo'lsa, induksiya qadamida har doim: $A(n + 1) - A(n)$ va $B(n + 1) - B(n)$ farqlarini solishtirish foydali.

Bu ko'pincha tengsizlikni yopadi.

4.4. KLASSIK OLIMPIADA MISOLI 1

Masala 1

Isbotlang: $2^n \geq n^2$ ($n \geq 4$)

Yechim (metodik to'g'ri yozuv)

Isbotlanadigan mulohaza: $P(n): 2^n \geq n^2$

Asos: $n = 4$, $2^4 = 16$, $4^2 = 16$ tenglik bajarildi

Induksiya farazi: $2^n \geq n^2$

Induksiya qadami ($n + 1$):

Chap tomon: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$

Induksiya farazi bo'yicha: $2^n \geq n^2$

Demak: $2^{n+1} \geq 2n^2$

Endi ko'rsataylik: $2n^2 \geq (n + 1)^2$

Bu tengsizlik quyidagi ko'rinishga keltiriladi:

$$2n^2 - (n + 1)^2 = n^2 - 2n - 1 \geq 0$$

Bu $n \geq 3$ da to'g'ri. Demak $n \geq 4$ uchun ham to'g'ri.

Shunday qilib: $2^{n+1} \geq (n + 1)^2$ $P(n + 1)$ isbotlandi.

Metodik izoh

Bu yerda muhim nuqta:

- 2^{n+1} ni $2 \cdot 2^n$ ga ajratish
- farazni to'g'ri joyda ishlatish

Bu avtomatik emas, **o'rgatiladigan texnika**.

4.5. KLASSIK OLIMPIADA MISOLI 2

Masala 2

Isbotlang: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \geq \ln(n + 1)$ ($n \geq 1$)

Yechim g'oyasi (metodik)

Bu masalada induksiya faqat **baholash bilan** ishlaydi.

Asos: $n = 1, 1 \geq \ln(2)$

Induksiya qadami: $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

Faraz: $S_n \geq \ln(n + 1)$

Qo'shamiz: $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{n+1}$

Kerak: $\ln(n + 1) + \frac{1}{n+1} \geq \ln(n + 2)$

Bu esa: $\frac{1}{n+1} \geq \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

Bu tengsizlik logarifmning o'rta qiymat xossasidan kelib chiqadi.

Metodik izoh

O'quvchiga ko'rsatish kerak:

- induksiya qadamini yopish uchun
- **qo'shimcha analitik baholash** kiritildi

Bu sof induksiya emas $\rightarrow$ **aralash usul**.

4.6. Qachon induksiya noto'g'ri ishlatiladi?

Noto'g'ri urinish

O'quvchi yozadi: $2^{n+1} \geq 2 \cdot n^2 \geq (n + 1)^2$

lekin bu ikkinchi tengsizlikni tekshirmagan.

Metodik yechim

Har doim alohida ko'rsating: $2n^2 - (n + 1)^2 \geq 0$

Bu yozuv:

- isbotni yopadi
- olimpiadada talab qilinadi

4.7. INDUKSIYA + AM–GM (kombinatsiya)

Tipik masala

Isbotlang ($n \geq 2$):

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$$

Metodik g'oya

- induksiya qadamida umumiy hadni ajratish
- AM–GM yoki boshqa baholash bilan yopish

Bu turdagi masalalar:

- induksiya
- tengsizlik
- baholash
ni birlashtiradi

4.8. O'QITUVCHI UCHUN DARS TAVSIYASI

Darsda tushuntirish tartibi

1. Oson eksponent tengsizlik
2. Induksiya qadamida **nima yetmayotganini** ko'rsatish
3. Qo'shimcha baholash kiritish
4. Nega u ishladi — tahlil

O'quvchi shuni tushunadi:

induksiya — avtomatik emas, u boshqariladi

4.9. 4-BO'LIM XULOSASI

Induksiya + tengsizlik — eng nozik bo'lim
Induksiya qadamini yopish — asosiy san'at
Umumiy hadni ajratish shart
Qo'shimcha baholashlar ko'pincha zarur
Olimpiadada juda ko'p tushadi

5-BO'LIM. INDUKSIYA + KOMBINATORIKA

“Kichikdan kattani sanash” mantiqi

5.1. Bo‘limning asosiy g‘oyasi

Kombinatorikada induksiya quyidagi savolga javob beradi:

“ n obyektli holatni $n-1$ obyektli holatdan qanday quramiz?”

Bu bo‘limda induksiya:

- isbot vositasi emas,
- **sanash algoritmi**ga aylanadi.

5.2. Qachon induksiya kombinatorikada ishlaydi?

Quyidagi belgilar bo‘lsa:

- “ketma-ketlik uzunligi n ”
- “ n ta obyekt”
- “oxirgi elementni alohida qarash mumkin”

→ induksiya juda qulay.

5.3. ENG MUHIM METODIK PRINTSIP

Har doim oxirgi elementni ajrat:

- oxirgi belgi 0 yoki 1
- oxirgi odam qiz yoki o‘g‘il
- oxirgi joy band yoki bo‘sh

Shundan keyin:

- oldingi holatlar soniga tayanib rekursiya chiqadi
- rekursiya induksiya bilan isbotlanadi

5.4. KLASSIK MISOL 1 (Fibonachchi tipi)

Masala 1

Uzunligi n bo'lgan $0-1$ ketma-ketliklarda ketma-ket ikkita 1 bo'lmasin. Bunday ketma-ketliklar soni F_{n+2} ga tengligini isbotlang.

Yechim (metodik, bosqichma-bosqich)

$f(n)$ – kerakli ketma-ketliklar soni bo'lsin.

Oxirgi belgiga qarab ajratamiz.

1-holat: oxiri 0 bilan tugaydi $\rightarrow$ oldingi $n - 1$ ta belgi erkin: $f(n - 1)$

2-holat: oxiri 1 bilan tugaydi $\rightarrow$ undan oldingi belgi 0 bo'lishi kerak $\rightarrow$ oxiri "...01", oldingi $n-2$ ta belgi erkin: $f(n - 2)$

Demak: $f(n) = f(n - 1) + f(n - 2)$

Boshlang'ich qiymatlar: $f(1) = 2, f(2) = 3$

Bu aynan Fibonacci rekursiyasi bo'lib: $f(n) = F_{n+2}$

Induksiya bilan tekshirish mumkin.

Metodik izoh

O'quvchiga urg'u:

- formulani yodlash emas
- oxirgi elementni ajratish asosiy g'oya=

5.5. KLASSIK MISOL 2 (kombinatorik tenglik)

Masala 2

Isbotlang: $C(n, 0) + C(n, 1) + C(n, 2) + \dots + C(n, n) = 2^n$

Yechim (induksiya bilan)

Induksiya qilinadigan mulohaza: $P(n): \sum_{k=0}^n C(n, k) = 2^n$

Asos: $n = 1, C(1, 0) + C(1, 1) = 1 + 1 = 2 = 2^1$

Induksiya farazi: $\sum C(n, k) = 2^n$

Paskal formulasi: $C(n + 1, k) = C(n, k) + C(n, k - 1)$

Yig'amiz: $\sum C(n + 1, k) = \sum C(n, k) + \sum C(n, k - 1)$

Har ikkala yig'indi: 2^n ga teng.

Demak: $\sum C(n+1, k) = 2^{n+1}$

Isbot tugadi.

5.6. O'QITUVCHI UCHUN MUHIM TEXNIKA

(ikki xil sanash + induksiya)

Agar:

- bitta obyektни ikki xil usul bilan sanash mumkin bo'lsa
- va n dan $n+1$ ga o'tish tabiiy bo'lsa

→ induksiya MUSTAHKAMLASH vositasi bo'ladi.

Bu olimpiadada juda qadrlanadi.

=

5.7. KLASSIK MISOL 3 (rekursiv formulani chiqarish)

Masala 3

n ta odamdan iborat qatorda hech qachon ikki qo'shni odam yonma-yon turmasin. Bunday joylashlar soni a_n bo'lsin. Rekursiya toping va induksiya bilan asoslang.

Yechim g'oyasi

Oxirgi odamni qaraymiz:

1. oxirgi odam tanlanmagan → a_{n-1}
2. oxirgi odam tanlangan → undan oldingi odam tanlanmagan → a_{n-2}

Demak: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Bu yana Fibonachchi turidagi rekursiya.

Induksiya bilan to'g'riligini ko'rsatish mumkin.

5.8. QACHON INDUKSIYA MAQSADGA NOMUVOFIQ?

Kombinatorikada induksiya QUYIDAGI hollarda ishlatilmasligi kerak:

- obyektlar o‘zaro simmetrik bo‘lsa
- to‘g‘ridan-to‘g‘ri formula mavjud bo‘lsa

Bu joylarda:

- to‘g‘ridan-to‘g‘ri sanash
- yoki kombinatorik identifikatsiya afzal.

Metodik jihatdan bu ham o‘rgatilishi shart.

5.9. 5-BO‘LIM XULOSASI

Kombinatorik induksiya — sanash mexanizmi

Oxirgi elementni ajratish asosiy texnika

Rekursiya → induksiya → formula

Fibonachchi tipli masalalar juda muhim

Olimpiadalarda juda ko‘p uchraydi

6-BO‘LIM. INDUKSIYA + SONLAR NAZARIYASI

Bo‘linuvchanlik va rekursiv sonlar bilan ishlash

6.1. Bo‘limning asosiy g‘oyasi

Sonlar nazariyasida induksiya ko‘pincha:

- bevosita n dan $n + 1$ ga emas,
- **n ni kichikroq bo‘laklarga ajratish** orqali ishlaydi.

Bu bo‘limda induksiya:

- bo‘linuvchanlikni saqlash
- rekursiv aniqlangan ketma-ketliklarni nazorat qilish uchun qo‘llanadi.

6.2. Qachon induksiya SONLAR NAZARIYASIDA qulay?

Quyidagi belgilar bo‘lsa — induksiya signal:

- “har bir n uchun bo‘linadi”
- “rekursiv aniqlangan ketma-ketlik”
- “EKUB bilan bog‘liq xossa”

- “mod bo‘yicha bir xil xulosa”

6.3. ENG MUHIM METODIK PRINTSIP

Induksiya qadamida **sonni buzmaslik** kerak.

Ya’ni:

- $n + 1$ ni shunchaki qo‘shma emas,
- **induksiya farazi ishlaydigan ko‘rinishga keltirish** zarur.

Ko‘pincha: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ yoki $a_{n+1} = k \cdot a_n + r$ ko‘rinishlari uchraydi.

6.4. KLASSIK MISOL 1 (bo‘linuvchanlik)

Masala 1

Isbotlang: $7 \mid (8^n - 1)$ barcha $n \geq 1$ uchun

Yechim (metodik to‘g‘ri uslubda)

Isbotlanadigan mulohaza: $P(n)$: $8^n - 1$ 7 ga bo‘linadi

Asos: $n = 1$, $8^1 - 1 = 7 \rightarrow 7$ ga bo‘linadi

Induksiya farazi: $8^n - 1 = 7 \cdot k \quad (k \in \mathbb{Z})$

Induksiya qadami ($n + 1$): $8^{n+1} - 1 = 8 \cdot 8^n - 1 = 8 \cdot (8^n - 1) + 7$

Induksiya farazi bo‘yicha: $8 \cdot (8^n - 1)$ 7 ga bo‘linadi, 7 ham 7 ga bo‘linadi.

Demak: $8^{n+1} - 1$ 7 ga bo‘linadi

Isbot tugadi.

Metodik izoh

Bu joyda muhimi: $8^{n+1} - 1 = 8(8^n - 1) + 7$

O‘quvchiga o‘rgatilishi shart: “induksiya farazi SUN’IY qo‘shilmaydi, u qulay algebraik ajratish bilan chaqiriladi”.

6.5. KLASSIK MISOL 2 (rekursiv ketma-ketlik)

Masala 2

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Isbotlang: a_n 1 va 2 dan boshqa tub songa bo'linmaydi

Metodik yechim g'oyasi

Bu yerda to'liq isbotdan ko'ra, **induksiya strukturasi muhim.**

Induksiya farazi: $a_1, a_2, \dots, a_n$

Induksiya qadami: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

Agar:

- a_n va a_{n-1} ikkalasi ham biror tub songa bo'linmasa
- u holda ularning yig'indisi ham o'sha songa bo'linmaydi (ba'zi shartlar bilan)

Bu masala kuchli induksiya bilan o'tiladi.

6.6. EKUB bilan bog'liq MISOL

Masala 3

Isbotlang: $EKUB(a_n, a_{n+1}) = 1$

bu yerda: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

Yechim (to'liq induksiya)

Asos: $EKUB(a_1, a_2) = EKUB(1, 1) = 1$

Induksiya farazi: $EKUB(a_n, a_{n+1}) = 1$

Ma'lum xossa: $EKUB(x, y) = EKUB(y, x + y)$

Shuning uchun: $EKUB(a_{n+1}, a_{n+2}) = EKUB(a_{n+1}, a_n + a_{n+1}) = EKUB(a_{n+1}, a_n)$

Induksiya farazi bo'yicha bu 1 ga teng.

Demak: $EKUB(a_{n+1}, a_{n+2}) = 1$

Isbotlandi.

6.7. O‘QITUVCHI UCHUN METODIK FOKUS

Nimalarga urg‘u beriladi?

Modul yoki bo‘linuvchanlikka o‘tishdan oldin:

- algebraik ajratish qilinganmi?

Induksiya qadamida:

- “qaysi hadni chiqarib oldik?”
- “faraz qayerda ishladi?”

O‘quvchiga: “SONNI emas, **ifodani boshqar**” fikri yetkaziladi.

6.8. Tipik xatolar (darsda albatta ko‘rsatish kerak)

1. Bevosita: $8^{n+1} - 1 = 8 \cdot 8^n - 1$ deb yozib to‘xtab qolish
2. Induksiya farazini ko‘rsatmasdan:

bo‘linadi deb yozish

3. EKUB xossasini isbotsiz ishlatish. Bular olimpiadada ballni olib qo‘yadi.

6.9. 6-BO‘LIM XULOSASI

Sonlar nazariyasida induksiya — algebra bilan birga ishlaydi

Ajratish (aylantirish) — kalit texnika

Rekursiv ketma-ketliklar uchun kuchli induksiya qulay

EKUB xossalari induksiyada tez-tez ishlatiladi

Bu bo‘lim olimpiada uchun juda muhim

7-BO‘LIM. INDUKSIYA QACHON ISHLAMAYDI

Noto‘g‘ri induksiya va metodik tuzoqlar

7.1. Nima uchun bu bo‘lim juda muhim?

Olimpiadada:

- eng chalg‘ituvchi masala — **induksiyaga o‘xshaydigan**, lekin
- **induksiya bilan isbotlab bo‘lmaydigan** masala.

O'quvchi shuni bilmasa:

- mantiqiy xato qiladi
- isbot "chiroyli", lekin **noto'g'ri** chiqadi

Shuning uchun:

"Induksiya ishlamaydi" degan joyni ko'ra bilish — yuqori daraja belgisi.

7.2. KENG TARQALGAN XATO

Uzilgan induksiya zanjiri

Noto'g'ri "isbot"

Da'vo: Barcha natural sonlar teng

"Soxta isbot": $n = 1$ da to'g'ri

- n bo'lsa to'g'ri deb olamiz
- $n + 1$ ham teng, chunki n ta bilan "bir xil"

Muammo nimada?

- n ta holat bilan $n + 1$ ta holat o'rtasida
uzluksizlik yo'q

Metodik xulosa

Induksiya qadamida: "Qayerda uzilish paydo bo'lyapti?" degan savol o'rgatilishi kerak.

7.3. KLASSIK MISOL — "BARCHA OTLAR BIR XIL RANGDA"

Bu misolni avval ko'rganmiz, lekin bu yerda **tahlil** qilamiz.

Noto'g'ri mantiq:

- n ta ot bir xil rangda
- $n + 1$ ta otni ikkita n lik guruhga ajratish
- kesishma bor deb o'ylash

Asl muammo:

$n = 1$ dan $n = 2$ ga o'tishda:

- guruhlar kesishmaydi

- rang uzatib bo'lmaydi

O'qituvchi uchun maslahat

Bu misolni:

- 1-bo'lim oxirida
- va 7-bo'limda
ikki marta ishlatish juda foydali

7.4. KENG TARQALGAN XATO

Noto'g'ri asos tanlash

Misol

Isbotlang: $2^n \geq n^3$ barcha $n \in N$

Asos qilib: $n = 1$ olinsa $2 \geq 1$ to'g'ri.

Lekin: $n = 10, 2^{10} < 10^3$

Metodik xulosa

Induksiya:

- faqat **shart to'g'ri bo'lgan joydan** boshlanadi
- noto'g'ri asos $\rightarrow$ noto'g'ri butun isbot

7.5. KENG TARQALGAN XATO

Induksiya farazi yetarli emas

Xato yondashuv

O'quvchi: $P(n)$ to'g'ri $\rightarrow P(n + 1)$

deb yozadi, lekin:

- $P(n + 1)$ ni isbotlash uchun
 $P(n - 1)$ ham kerak

Oddiy induksiya bilan hal qilmoqchi bo'ladi

To'g'ri yechim

Bu joyda: kuchli induksiya ishlatilishi shart.

7.6. KENG TARQALGAN XATO

Induksiya emas, yashirin taxmin

Misol

Isbot: $a_n = a_{n-1}$ deb yozadi, lekin:

- bu **induksiya emas**
- bu tinimsiz tenglikni qabul qilish

Metodik yondashuv

- “qayerda faraz ishladi?”
- “qaysi joyda xulosa chiqdi?”

degan savollar beriladi.

7.7. INDUKSIYA O'RNIGA QARSHI MISOL

Ba'zi masalalarda **eng kuchli yechim** — induksiya emas, balki:

- qarshi misol
- ekstremal printsip
- invariant

Misol

Da'vo: $n^2 + n + 41$ tub son hamma n uchun deb o'ylanadi.

$n = 41$ da:

$$41^2 + 41 + 41 = 41(41 + 1 + 1)$$

murakkab.

Xulosa

Bu yerda induksiya emas, **qarshi misol** ishlaydi.

7.8. O‘QITUVCHI UCHUN METODIK XULOSALAR (ENG MUHIM)

Induksiya:

- kuchli qurol
- lekin cheksiz emas

Har induktiv isbotdan oldin savol:

“Bu umuman to‘g‘rimi?”

O‘quvchi:

- induksiya ishlaymaydigan joyni sezishni o‘rganishi kerak

Bu bo‘lim — yuqori darajani ajratuvchi bo‘lim

7.9. BUTUN MAVZU BO‘YICHA YAKUNIY XULOSA

Biz o‘tdik:

1. Oddiy induksiya
2. Kuchli induksiya
3. Konstruktiv induksiya
4. Induksiya + tengsizlik
5. Induksiya + kombinatorika
6. Induksiya + sonlar nazariyasi
7. Induksiya qachon ishlaymaydi