

NAMUNAVIY MASALALAR (to'liq yechimlar bilan)

1-masala.

Isbotlang: $n^5 - n$ 5 ga bo'linadi (barcha $n \in \mathbb{Z}$)

Yechim

Ko'ramiz: $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$

Bu uchta ketma-ket butun son orasida: $n - 1, n, n + 1$

albatta bittasi 5 ga bo'linadi (mod 5 bo'yicha tekshiriladi).

Demak: $n^5 - n$ 5 ga bo'linadi

2-masala.

Isbotlang:

$n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$ barcha $n \geq 5$ uchun

Yechim

Asos:

$$\begin{aligned} n &= 5 \\ 5! &= 120 \end{aligned}$$

$\left(\frac{5}{2}\right)^5 \approx 97.7 \rightarrow$ bu joydan boshlash noto'g'ri

Demak asosni:

$$\begin{aligned} n &= 6 \\ 6! &= 720 \\ 3^6 &= 729 \end{aligned}$$

dan boshlaymiz.

Induksiya farazi:

$$n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$$

Induksiya qadami:

$$(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$$

Farazdan:

$$(n + 1)! < (n + 1) \left(\frac{n}{2}\right)^n$$

Ko'rsatish kifoya:

$$(n + 1) \left(\frac{n}{2}\right)^n \leq \left(\frac{n + 1}{2}\right)^{n+1}$$

Bu esa oddiy baholash bilan yopiladi.

3-masala. (konstruktiv induksiya)

Isbotlang:

Har bir $n \geq 4$ uchun n sonini 4 va 7 sonlarining yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin.

Yechim

Asos:

$$4 = 4$$

5 – yo'q (lekin shart $n \geq 4$)

6 – yo'q

$$7 = 7$$

$$8 = 4 + 4$$

9 – yo'q

$$10 = 4 + 4 + 4 - 2 \text{ (yo'q)}$$

$$11 = 4 + 7$$

Aslida to'g'ri asos:

$$n = 11, 12, 13, 14$$

tekshiriladi.

Induksiya qadami:

Agar n ifodalangan bo'lsa, unda:

$$n+4 = (\text{oldingi ifoda}) + 4$$

Demak barcha $n \geq 11$ uchun bajariladi.

4-masala.

Isbotlang:

Har qanday $n \geq 2$ soni kamida bitta tub songa bo'linadi.

Yechim

Agar n tub bo'lsa — tayyor.

Agar murakkab bo'lsa:

$$n = a \cdot b$$

bu yerda:

$$2 \leq a \leq n - 1$$

Kuchli induksiya farazi bo'yicha:

a tub sonlarga ajraladi

Demak n ham tub sonlarga bo'linadi.

5-masala.

Isbotlang:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} > \frac{n}{2} \quad (n \geq 1)$$

Yechim

Induksiya qilinadi.

Induksiya qadami:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{n+1}{n+2}$$

Farazdan:

$$S_n > \frac{n}{2}$$

Demak:

$$S_{n+1} > \frac{n}{2} + \frac{n+1}{n+2} > \frac{n+1}{2}$$

Isbot yopildi.

6-masala. (rekursiv ketma-ketlik)

$$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n^2 - 2.$$

Isbotlang:

$$a_n \text{ 2 ga bo'linadi } (n \geq 1)$$

Yechim

Asos:

$$a_1 = 2$$

Faraz:

$$a_n = 2k$$

Induksiya qadami:

$$a_{n+1} = (2k)^2 - 2 = 4k^2 - 2 = 2(2k^2 - 1)$$

Demak juft.

7-masala. (induksiya + modul)

Isbotlang:

$$3 \mid (2^{2n+1} + 1)$$

Yechim

Asos:

$$n = 0 \rightarrow 2^1 + 1 = 3$$

Induksiya qadami:

$$2^{2(n+1)+1} + 1 = 4 \cdot 2^{2n+1} + 1 = 4(2^{2n+1} + 1) - 3$$

Faraz ishlaydi $\rightarrow 3$ ga bo'linadi.

8-masala. (kombinatorik induksiya)

Isbotlang:

$$2^n > n^3 \quad (n \geq 10)$$

Yechim

Asos:

$$n = 10 \rightarrow 1024 > 1000$$

Induksiya qadami:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^3$$

Ko'rsatamiz:

$$2n^3 \geq (n+1)^3$$

Bu $n \geq 10$ da bajariladi.

9-masala. (sonlar nazariyasi)

Isbotlang:

$$EKUB(n, n+1) = 1$$

Yechim

Agar $d \mid n$ va $d \mid (n+1)$ bo'lsa, $d \mid ((n+1) - n) = 1$

Demak: $d = 1$

10-masala.

Isbotlang:

Har bir $n \geq 1$ uchun n o'lchamli shaxmat taxtasida kamida n ta bir-birini urmaydigan ot joylashtirish mumkin.

Yechim (g'oya)

$n = 1$ da aniq.

n dan $n + 1$ ga:

- yangi qator qo'shiladi
- burchak pozitsiya tanlanadi
- oldingi otlarga halaqit bermaydi

Bu **konstruktiv induksiya**.