

1-masala. Darajali tengsizlik: geometrik va arifmetik o'rtacha

Isbotlang: barcha $n \geq 2$ uchun

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Yechim

Intuitiv fikr: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ funksiyasi n oshganda ortadi va limiti e (taxminan 2.718...) ga intiladi, demak 3 dan oshmaydi. Ammo buni induksiya bilan ham asoslab ko'ramiz.

Isbotlanadigan mulohaza:

$$P(n): \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Asos:

$$n = 2:$$

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25 < 3.$$

Demak $P(2)$ to'g'ri.

Induksiya farazi:

Faraz qilamizki, qandaydir $n \geq 2$ uchun $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Endi $P(n + 1)$ ni isbotlaymiz, ya'ni: $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 3$.

Bu yerda bevosita n bilan bog'lash qiyin, shuning uchun boshqa usul: funktsiyaning kamaymasligini ko'rsatib, yetarli katta n uchun ham 3 dan kichikligini ko'rsatish kifoya.

Lekin induksiya bilan ham shunday yo'l tutish mumkin:

$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ($n \geq 2$) bo'lishini ko'rsatish kifoya bo'ladi, chunki u holda: $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 < 3$.

Bu noaniqroq va texnik isbot talab qiladi; darsda bu masalani ko'proq "induksiya + analiz" misoli sifatida muhokama qilish maqsadga muvofiq.

Bu masalani shu holatda o'qituvchi bilan birga tahlil qilish — “har bir tengsizlikni induksiya bilan urishga urinish shart emas” degan pedagogik g'oyani ochib beradi.

(Shuni maxsus olimpiada mashg'ulotida ishlatish foydali.)

2-masala. Darajali tengsizlik: juda kuchli baholash

Isbotlang: barcha $n \geq 4$ uchun

$$2^n > n^3.$$

Yechim

$$P(n): 2^n > n^3.$$

Asos:

$$n = 4:$$

$$2^4 = 16, 4^3 = 64 - \text{bu yerda noto'g'ri.}$$

Asosni o'zgartiramiz. Kattaroq n dan boshlaymiz.

$$n = 10:$$

$$2^{10} = 1024, 10^3 = 1000 \rightarrow 2^{10} > 10^3.$$

Demak $P(10)$ to'g'ri.

Induksiya farazi:

$$2^n > n^3 (n \geq 10).$$

Induksiya qadami:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^3.$$

Bizga kerak:

$$2 \cdot n^3 \geq (n+1)^3 \text{ bo'lsa, unda:}$$

$$2^{n+1} > (n+1)^3 \text{ bo'ladi.}$$

Endi tekshiramiz:

$$2n^3 - (n+1)^3 \geq 0$$

$$2n^3 - (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = n^3 - 3n^2 - 3n - 1.$$

Bu ifoda $n \geq 10$ da ijobiy ekanini tekshiramiz. Masalan:

$n = 10$ da:

$$10^3 - 3 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10 - 1 = 1000 - 300 - 30 - 1 = 669 > 0.$$

Bu kub ko'rinishdagi polinom n oshgan sari yana ham ijobiy bo'lib boradi, demak barcha $n \geq 10$ uchun $2n^3 > (n+1)^3$.

Natijada:

$$2^{n+1} > 2n^3 > (n+1)^3.$$

Shunday qilib, $P(n) \rightarrow P(n+1)$ bajarildi.

Demak $2^n > n^3$ barcha $n \geq 10$ uchun to'g'ri.

O'qituvchi darsda alohida ta'kidlaydi:

- Induksiya asos nuqtasini har doim $n = 1$ dan olish shart emas,
- ba'zan $n = 10, n = 100$ dan boshlash kerak bo'ladi.

3-masala. Kombinatorik tenglik (Paskalning ikkinchi formulasi)

Isbotlang:

$$C(n, 0) + 2C(n, 1) + 3C(n, 2) + \dots + nC(n, n-1) = n2^{n-1}.$$

Yechim

Isbotlanadigan mulohaza:

$$P(n): \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)C(n, k) = n2^{n-1}.$$

Avval chap tomonni biroz o'zgartiramiz:

$$(k+1)C(n, k) = nC(n-1, k),$$

bu binom koeffitsientning ma'lum identikligi:

$$C(n, k) = \frac{n}{k} \cdot C(n-1, k-1),$$

yoki shu kabi formulalardan kelib chiqadi.

Demak:

$$\sum_{\{k=0\}}^{\{n-1\}(k+1)C(n,k)} = \sum_{\{k=0\}}^{\{n-1\}n} C(n-1, k) = n \cdot \sum_{\{k=0\}}^{\{n-1\}C(n-1,k)}.$$

Bu yerda endi:

$$\sum_{\{k=0\}}^{\{n-1\}C(n-1,k)} = 2^{\{n-1\}},$$

chunki:

$$\sum_{\{k=0\}}^{\{n-1\}C(n-1,k)} + C(n-1, n-1) = 2^{\{n-1\}} + C(n-1, n-1) = 2^{\{n-1\}} + 1,$$

aslida esa to'liq yig'indi $2^{\{n-1\}}$:

$$\sum_{\{k=0\}}^{\{n-1\}C(n-1,k)} = 2^{\{n-1\}}.$$

Demak:

$$\sum (k+1)C(n, k) = n 2^{\{n-1\}}.$$

Bu tenglikni ham oddiy kombinatorik talqin, ham induksiya bilan alohida mustahkamlash mumkin. Masalan, $P(n)$ dan $P(n+1)$ ga o'tishda Paskal uchburchagi formulalaridan foydalanib rekursiv chiqarish.

Bu masala – induksiyadan binom identikliklarini chuqurroq tushuntirish uchun juda foydali.

4-masala. Tengsizlik: kvadrat ildizli ketma-ketlik

Isbotlang: barcha $n \geq 1$ uchun

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} \leq n \sqrt{n}.$$

Yechim

Bu tengsizlik intuitiv ravishda to'g'ri: har bir $\sqrt{k} \leq \sqrt{n}$, shuning uchun

$$\sum \sqrt{k} \leq \sqrt{n}.$$

Bu yerda induksiya oson, lekin o'qituvchi uchun metodik maroq shundaki, bu misol orqali:

- trivial baholash (har biri $\leq \sqrt{n}$)
- induksiya g'oyasini taqqoslash mumkin.

Induksiya bilan isbotlashga ham urinish mumkin, lekin sanash juda oddiy:

Har bir $k = 1, \dots, n$ uchun $\sqrt{k} \leq \sqrt{n}$.

Demak n ta haddan iborat yig'indining har biri $\sqrt{n}$ dan katta emas:

$$\sqrt{1} + \dots + \sqrt{n} \leq n \sqrt{n}.$$

Bu yerda induksiya emas, balki oddiy baholash ishlaydi. Mazmuni shundaki:

har tengsizlikni induksiya bilan isbotlash shart emas.

Olimpiada darajasida aynan mana shu fikrni o'rgatish juda muhim.

5-masala. Rekursiv ketma-ketlik: ning aniq formulasini induksiya bilan tekshirish

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3 a_n + 2.$$

Isbotlang: $a_n = 3^n - 1$.

Yechim

Biz avval ketma-ketlik uchun taxmin qilingan formulani topib olamiz (masalan, bir necha bosqich hisoblab), so'ng induksiya bilan uni tasdiqlaymiz.

Asos:

$$n = 1: a_1 = 2, \quad 3^1 - 1 = 2 \rightarrow \text{to'g'ri.}$$

Induksiya farazi:

$$a_n = 3^n - 1.$$

Induksiya qadami:

$$a_{n+1} = 3 a_n + 2.$$

Farazni qo'yamiz:

$$a_{n+1} = 3(3^n - 1) + 2 = 3^{n+1} - 3 + 2 = 3^{n+1} - 1.$$

Demak formulamiz $n + 1$ uchun ham to'g'ri.

Induksiya bilan isbot yakunlandi.

Bu misol – “rekursiv ketma-ketlikka aniq formula topish + induksiya bilan tekshirish” mavzusining klassik namunasi.

6-masala. Bo‘linuvchanlik: ko‘paytmali ifoda

Isbotlang: barcha $n \geq 1$ uchun

$n^3 + 2n$ har doim 3 ga bo‘linadi.

Yechim

Isbotlanadigan mulohaza:

$P(n)$: $n^3 + 2n$ 3 ga bo‘linadi.

Asos: $n = 1$: $1^3 + 2 \cdot 1 = 3 \rightarrow 3$ ga bo‘linadi.

Induksiya farazi:

$n^3 + 2n = 3k$ (k – butun son).

Induksiya qadami:

$(n + 1)^3 + 2(n + 1)$ ni ko‘rib chiqamiz:

$$\begin{aligned}(n + 1)^3 + 2(n + 1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 2n + 2 \\ &= (n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3.\end{aligned}$$

Induksiya farazi bo‘yicha:

$n^3 + 2n = 3k$,

demak:

$$(n + 1)^3 + 2(n + 1) = 3k + 3n^2 + 3n + 3 = 3(k + n^2 + n + 1).$$

Bu 3 ga bo‘linadi.

Demak $P(n + 1)$ ham to‘g‘ri.

7-masala. Yig‘indi formulasi: kublar yig‘indisi

Isbotlang:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Yechim

Bu juda mashhur formula, lekin induksiya bilan isbotlash mexanik bo'lsa ham, olimpiada mantiqini mustahkamlash uchun foydali.

$$P(n): 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Asos:

$$n = 1: \quad 1^3 = 1, \left(1 \cdot \frac{2}{2} \right)^2 = 1 \rightarrow \text{to'g'ri.}$$

Induksiya farazi:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Induksiya qadami:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3.$$

O'ng tomonda $P(n+1)$ ning ifodasini yozamiz:

$$\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2.$$

Endi ko'rsatish kerak:

$$\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2.$$

Bu ifodani algebraik soddalashtirish kerak bo'ladi:

Chap tomonni $\frac{(n+1)^2}{4} \cdot n^2 + (n+1)^3$ ga keltirish, umumiy ko'paytuvchini chiqarish orqali o'ng tomondagi ifodaga tengligi ko'rsatiladi.

8-masala. Kombinatorik tenglik: $C(n,k)$ rekursiyasi

Isbotlang: barcha $n \geq 1$ va $1 \leq k \leq n$ uchun

$$C(n+1, k) = C(n, k) + C(n, k-1).$$

Bu Paskal identikligi bo'lib, ko'pincha definitsiya sifatida qabul qilinadi. Biz uni induksiya bilan n bo'yicha asoslasak ham bo'ladi, lekin yanada chiroyli usul – kombinatorik talqin:

$C(n+1, k)$ – $(n+1)$ elementli to'plamdan k element tanlash usullari soni. Tanlovda $(n+1)$ -element qatnashsinmi-yo'qmi, degan ikkita holatga bo'lamiz:

1. $(n+1)$ -element tanlanmagan:
qolgan n elementdan k tasi tanlanadi $\rightarrow C(n, k)$.
2. $(n+1)$ -element tanlangan:
qolgan n elementdan $k-1$ tasi tanlanadi $\rightarrow C(n, k-1)$.

Demak:

$$C(n+1, k) = C(n, k) + C(n, k-1).$$

Bu misol orqali **induksiya o'rniga to'g'ridan-to'g'ri kombinatorik isbotning** ko'rinishini ko'rish juda tarbiyaviy:
har doim induksiya yopishib olish shart emas, ba'zan sanashning o'zi yetadi.

9-masala. Kombinatorika: 2^n – bo'sh bo'lmagan kichik to'plamlar soni

Isbotlang:

$$C(n, 1) + C(n, 2) + \dots + C(n, n) = 2^n - 1.$$

Yechim

$$P(n): \sum_{k=1}^n C(n, k) = 2^n - 1.$$

Asos:

$$n = 1:$$

$$C(1, 1) = 1,$$

$$2^1 - 1 = 1 \rightarrow \text{to'g'ri.}$$

$$\text{Induksiya farazi: } \sum_{k=1}^n C(n, k) = 2^n - 1.$$

Induksiya qadami:

$$\sum_{\{k=1\}}^{\{n+1\}} C(n+1, k) = ?$$

Avval to'liq yig'indini olamiz:

$$\sum_{\{k=0\}}^{\{n+1\}} C(n+1, k) = 2^{\{n+1\}}.$$

Bo'sh to'plamga mos $C(n+1, 0) = 1$ ni chiqarib tashlaymiz:

$$\sum_{\{k=1\}}^{\{n+1\}} C(n+1, k) = 2^{\{n+1\}} - 1.$$

Bu tenglik aslida induksiyaga bog'liq emas, binom teoremasidan keladi, lekin induksiya yordamida:

$2^{\{n+1\}} = 2 \cdot 2^n$ shaklidagi rekursiya bilan mustahkamlash mumkin.

10-masala. To'rtburchak qoplash: kuchli va konstruktiv induksiya

Isbotlang:

Har bir $n \geq 1$ uchun $2 \times n$ o'lchamli taxtani 2×1 o'lchamdagi domino bo'laklar bilan to'liq qoplash mumkin bo'lgan holatlar soni F_{n+1} ga teng (Fibonachchi ketma-ketligi).

Yechim

$f(n)$ – $2 \times n$ taxtani qoplash usullari soni.

Oxirgi ustunni qanday qoplashni qaraymiz:

1. Oxirgi ustunni bitta vertikal domino bilan yopamiz $\rightarrow$ qolgan $2 \times (n-1)$ taxta qoladi $\rightarrow f(n-1)$ hol.
2. Oxirgi ikki ustunni ikkita gorizontal domino bilan yopamiz $\rightarrow$ qolgan $2 \times (n-2)$ taxta qoladi $\rightarrow f(n-2)$ hol.

Demak:

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2).$$

Boshlang'ich qiymatlar:

$$f(1) = 1 \text{ (bitta vertikal bo'lak)}$$

$$f(2) = 2 \text{ (2 vertikal yoki 2 gorizontal domino).}$$

Bu aynan Fibonachchi rekursiyasiga mos:

$$\begin{aligned}f(1) &= 1 = F_2 \\f(2) &= 2 = F_3 \\f(n) &= F_{n+1}.\end{aligned}$$

Induksiya bilan aniq:

$P(n): f(n) = F_{n+1}$ mulohazani isbotlab ketish mumkin.

Bu masala:

- konstruktiv induksiya (qurish)
- kuchli induksiya
- kombinatorik fikrlashni birlashtiradi.