

FUNKSIONAL TENGLAMALAR

Olimpiada uchun metodik tavsiya (o'qituvchilar uchun)

Funksional tenglama nima va nega “qiyin”?

Oddiy ta'rif

Funksional tenglama — bu oddiy “ x ni top” emas, balki:

f funksiyani topish masalasi

Masalan:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(x^2 + 1) = f^2(x) + 1$$

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

Bu yerda noma'lum — funksiya f .

Nima uchun olimpiadada muhim?

ko'p olimpiada masalalari funksional tenglama ko'rinishida

algebra, sonlar nazariyasi, tengsizliklar bilan bog'lanadi

o'quvchini formuladan **fikrlashga o'tkazadi**

Psixologik to'siq

O'quvchi odatda:

“Butun funksiyani qanday topaman?” deb qo'rqadi.

O'qituvchi vazifasi:

tartib borligini ko'rsatish

har bir masala **reja bilan** yechilishini tushuntirish

Asosiy tushunchalar

Soha (domain) va qiymatlar to'plami

Har bir funksional tenglamada avval aniqlang:

x, y qayerdan? N, Z yoki R ?

$f: R \rightarrow R$ yoki $f: N \rightarrow Z$?

Metodik qoida:

Birinchi savol: “ **f** qayerda aniqlangan?”

O'qitish strategiyasi (bosqichma-bosqich)

Tavsiya etilgan ketma-ketlik

1. Diskret bosqich

misol: $f(n + 1) = f(n) + 2$ $f: N \rightarrow N$

2. Oddiy strukturali tenglamalar

$$f(x + 1), f(2x), f\left(\frac{x}{2}\right)$$

3. Klassik tenglamalar

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y) \\ f(x + y) &= f(x) \cdot f(y) \end{aligned}$$

4. Olimpiada darajasi
qo'shimcha shartlar bilan

FUNKSIONAL TENGLAMALARDA ASOSIY METODLAR

Maxsus qiymat qo'yish — 1-qadam

Doim sinab ko'riladi:

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$x = y$$

$$y = -x$$

$$x = 1$$

Maqsad:

$$f(0)$$

$$f(1)$$

umumiy xatti-harakatni aniqlash

Metodik maslahat:

Har masalada avtomatik refleks bo'lsin:

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{1} \rightarrow x = y$$

Doimiy (konstant) yechimlar

Avval doim:

$$f(x) = C$$

qo'yib tekshiriladi.

Masalan:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

uchun:

$$f(x) = 0 \text{ — yechim.}$$

Tartib:

konstant yechimlar

konstant bo'lmagan yechimlar

Almashtirish va simmetriya

Agar tenglamada:

$$f(x + y)$$

$$f(x - y)$$

bo'lsa, albatta:

x va y ni almashtiring

$$x = y$$

$$y = -x$$

Bu yangi tenglamalar beradi.

Injektivlik(bir-biriga moslik) va sur'yektivlik (to'liqlik)

Injektivlik

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

Funksional tenglamada:

agar $f(U) = f(V)$ kelib chiqsa, va f injektiv bo'lsa, $U = V$ deb olinadi.

Bu juda kuchli usul.

Sur'yektivlik

Har bir qiymatga mos x mavjud.

Ko'pincha to'g'ridan-to'g'ri aytilmaydi,
lekin tenglamadan kelib chiqadi.

Uzluksizlik, monotonlik, chegaralanganlik

Koshi tenglamasi:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Agar:

f uzluksiz

yoki monoton

yoki kesmada chegaralangan

bo'lsa, unda:

$$f(x) = k \cdot x$$

Aks holda “noodatiy” yechimlar borligini aytib o'tish kerak.

Standart almashtirish

Masalan:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 3 \cdot x \cdot y$$

ko'rinishida bo'lsa, odatda:

$$g(x) = f(x) - a \cdot x^2 - b \cdot x - c$$

deb olinadi va tenglama soddalashtiriladi.

Asosiy funksional tenglama turlari

Koshi ko'rinishi

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Yechimlar:

$$f(x) = k \cdot x$$

yoki (qo'shimcha shart bo'lmasa) murakkab yechimlar

Multiplikativ(ko'paytma) ko'rinish

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

Ko'pincha:

$$f(x) = a^x$$

$$\text{yoki } f(x) = 0$$

$$\text{yoki } f(x) = 1$$

Aralash holda

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + x \cdot y$$

Ko‘pincha kvadrat orqali ochiladi.

O‘quvchining tipik xatolari

1. f ni oddiy funksiya deb o‘ylash
2. Soha e’tibordan chiqishi
3. Injektivlikni ko‘rmaslik
4. Tekshirmasdan javob yozish
5. Boshqa yechim yo‘qligini isbotlamaslik

O‘qituvchi uchun “oltin savollar”

0 qo‘ydingmi?

1 qo‘ydingmi?

$x = y$ ni ko‘rdingmi?

konstant yechim bormi?

injektivlik chiqyaptimi?

topilgan f ni tekshirdingmi?

Xulosa

Funksional tenglamalar —

tizimli mavzu

reja bilan o‘rganiladi

o‘quvchini yuqori darajaga olib chiqadi

Masalalar

1- masala

$f : R \rightarrow R$ funksiya uchun:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

va

$$f(1) = 2$$

berilgan. $f(x)$ ni toping.

Yechim

Maxsus qiymatlar qo'yamiz.

1. $y = 0$:

$$f(x) = f(x) + f(0)$$

Demak:

$$f(0) = 0$$

2. $x = y = 1$:

$$f(2) = f(1) + f(1) = 4$$

3. $x = n, y = 1$ (induksiya):

$$f(n + 1) = f(n) + f(1) = f(n) + 2$$

Demak:

$$f(n) = 2n \quad (n \in Z)$$

Real sonlar uchun oddiy chiziqli yechim:

$$f(x) = 2x$$

Javob:

$$f(x) = 2x$$

2- masala

$f : R \rightarrow R$ funksiya uchun:

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

va

$$f(1) = 3$$

berilgan. $f(x)$ ni toping.

Yechim

1. $y = 0$:

$$f(x) = f(x) \cdot f(0)$$

Agar $f(x) \neq 0$ bo'lsa, demak:

$$f(0) = 1$$

2. $x = y = 1$:

$$f(2) = f(1) \cdot f(1) = 9$$

3. Induksiya bilan:

$$f(n) = 3^n$$

Demak real sonlar uchun:

$$f(x) = 3^x$$

Javob:

$$f(x) = 3^x$$

3- masala

$f : R \rightarrow R$ funksiya quyidagicha berilgan:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + x \cdot y$$

va

$$f(0) = 0$$

Topping $f(x)$.

Yechim

Bu tipda f kvadratli bo'ladi deb taxmin qilamiz:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$$

Chap tomon:

$$f(x + y) = a \cdot (x + y)^2 + b \cdot (x + y)$$

Ong tomon:

$$\begin{aligned} & f(x) + f(y) + x \cdot y \\ &= a \cdot x^2 + b \cdot x + a \cdot y^2 + b \cdot y + x \cdot y \end{aligned}$$

Tenglashtiramiz:

Chap:

$$a \cdot x^2 + 2a \cdot x \cdot y + a \cdot y^2 + b \cdot x + b \cdot y$$

O'ng:

$$a \cdot x^2 + a \cdot y^2 + b \cdot x + b \cdot y + x \cdot y$$

Taqqoslaymiz:

$$2a \cdot x \cdot y = x \cdot y$$

Demak:

$$2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Shunday qilib:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$$

Javob:

$$f(x) = \frac{x^2}{2}$$

4- masala

$f : R \rightarrow R$ funksiya quyidagicha berilgan:

$$f(2x) = 2f(x)$$

va

$$f(1) = 3$$

berilgan. $f(x)$ ni toping.

Yechim

Bu ko'rinishda f chiziqli bo'lishini taxmin qilamiz:

$$f(x) = k \cdot x$$

Tekshiramiz:

$$f(2x) = k \cdot (2x) = 2k \cdot x$$

Bu esa:

$$2f(x) = 2k \cdot x$$

Mos keladi.

Endi $f(1) = 3$ dan:

$$k = 3$$

Javob:

$$f(x) = 3x$$