

В. П. Дельцов, В. В. Дельцов

# ФИЗИКА

## Дойти

### ДО САМОЙ СУТИ!

## НАСТОЛЬНАЯ КНИГА

для углубленного  
изучения физики  
в средней школе

Абитуриентам

Участникам  
олимпиад

Учителям физики

Всем, кто хочет  
понять физику  
и научиться решать  
стандартные  
и нестандартные  
задачи!

- ВОЛНЫ  
- ОПТИКА



URSS

В. П. Дельцов, В. В. Дельцов

# ФИЗИКА

## ДОЙТИ ДО САМОЙ СУТИ!

Настольная книга  
для углубленного изучения  
физики в средней школе

# Волны. Оптика

Научный редактор  
кандидат физико-математических наук  
*Н. С. Алексеева*



URSS

МОСКВА

**Дельцов Виктор Павлович, Дельцов Василий Викторович**

**Физика: дойти до самой сути! Настольная книга для углубленного изучения физики в средней школе. Волны. Оптика:** Учебное пособие / Науч. ред. Н. С. Алексеева. М.: ЛЕНАНД, 2017. — 240 с.

Настоящее издание представляет собой пятую часть уникального учебного пособия по основам современной физики для средней школы, посвященную теме оптики. Оно предназначено для школьников, углубленно изучающих физику, а также для абитуриентов. Пособие может использоваться в качестве настольной книги для учителей физики, ибо в нем есть все — от определений физических величин и формулировок законов до математических выводов достаточно сложных вопросов; от несложных примеров до олимпиадных задач, многие из которых решены.

Настоящая книга — плод 40-летнего преподавания физики в классах основного и физико-математического профилей. Многое в существовавших ранее и нынешних учебниках авторов не устраивает, поэтому они пытаются растолковать трудные и спорные моменты сами, исключить двойные и тройные толкования одного и того же. Теоретический материал изложен на глубоком научном уровне с единым подходом к формулировкам, конкретно и четко, что существенно сокращает расстояние от теории до практики (решения задач) и избавляет учащихся от необходимости впоследствии пересучиваться в вузах.

По ходу изложения теоретического материала постоянно разбирается большое количество задач, это помогает еще глубже понять теорию. А это необходимо, чтобы еще успешнее решать другие стандартные и нестандартные задачи — и не только по физике, ибо развитый мозг из одной области знаний может легко переключаться на решение задач в других областях.

Цель авторов — помочь учащимся усвоить правильно физические понятия и законы, иллюстрируя их проявление на примерах, и научиться переводить нестандартные задачи в стандартный вид и решать их уже как простые задачи.

Представленный курс уникален по глубине, полноте и систематичности изложения теоретического и практического материала. Книга написана практикующим учителем физики, подготовившим десятки призеров Всероссийской олимпиады, в соавторстве с его сыном, магистром МФТИ, который, будучи школьником, три года подряд становился призером и победителем заключительного этапа Всероссийской олимпиады по физике. Весь материал в пособии преподнесен так, чтобы раскрыть физическую сущность происходящих явлений и чтобы от теории до практики решения задач был всего один шаг.

#### **Рецензенты:**

учитель высшей категории *С. Н. Калякина*;

заслуженный учитель Чувашской Республики *А. С. Чугунова*

ООО «ЛЕНАНД». 117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.  
Формат 60×90/16. Печ. л. 15. Зак. №3354.

Отпечатано в ООО «Печатное дело». 142300, МО, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1.

**ISBN 978–5–9710–3786–6**


© ЛЕНАНД, 2017

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА	
	E-mail: <a href="mailto:URSS@URSS.ru">URSS@URSS.ru</a>
	Каталог изданий в Интернете:
	<a href="http://URSS.ru">http://URSS.ru</a>
	Тел./факс (многоканальный): + 7 (499) 724 25 45
URSS	


# Оглавление

Используемые обозначения физических величин.....	5
--	---


## Глава 1. Предварительные сведения о волнах..... 6

Введение .....	6
§ 1. Механические волны .....	8
§ 2. Механические волны в упругих средах. Скорость звука .....	10
§ 3. Уравнение бегущей волны .....	13
§ 4. Энергия волны, поток энергии, плотность потока энергии .....	15
§ 5. Стоячие волны.....	19
 Упражнения .....	22



## Глава 2. Звуковые волны ..... 24

§ 6. Звуковые волны.....	24
§ 7. Объективные характеристики звука .....	25
§ 8. Субъективные характеристики звука .....	29
§ 9. Акустический резонанс. Анализ и синтез звука.....	32
§ 10. Шумы. Консонанс. Диссонанс .....	34
§ 11. Звуковые явления.....	36
 Упражнения .....	38

## Глава 3. Общие свойства волн ..... 41

§ 12. Поглощение и рассеяние волн.....	41
§ 13. Отражение волн.....	44
§ 14. Преломление волн. Закон Снеллиуса .....	46
§ 15. Принцип Гюйгенса .....	50
§ 16. Дисперсия волн .....	53
§ 17. Поляризация волн. Закон Малюса. Закон Брюстера.....	56
§ 18. Двойное лучепреломление. Дихроизм .....	60
§ 19. Сложение волн. Интерференция .....	62
§ 20. Интерференция света.....	67
§ 21. Дифракция волн. Теория зон Френеля .....	77
§ 22. Дифракция света .....	81
§ 23. Дифракция и разрешающая способность оптических приборов. Острота зрения .....	83
§ 24. Дифракция на щелях.....	87
§ 25. Дифракционная решётка.....	89
§ 26. Электромагнитные волны .....	92
§ 27. Изобретение радио.....	95
§ 28. Принципы радиосвязи .....	96
§ 29. Шкала электромагнитных излучений.....	99
 Упражнения .....	102



<b>Глава 4. Геометрическая оптика .....</b>	<b>107</b>
§ 30. Законы геометрической оптики .....	107
§ 31. Границы применимости геометрической оптики .....	109
§ 32. Плоское зеркало .....	111
§ 33. Сферические зеркала .....	113
§ 34. Построение изображений в сферическом зеркале .....	117
§ 35. Преломление на плоской поверхности .....	121
§ 36. Преломление на сферической поверхности .....	122
§ 37. Формула толстой и тонкой линзы .....	125
§ 38. Построение изображений в тонких линзах .....	128
§ 39. Система линза – зеркало .....	135
§ 40. Система соосных линз .....	136
§ 41. Фотоаппарат и кинопроектор .....	138
§ 42. Глаз как оптическая система .....	140
§ 43. Адаптация. Бинокулярное зрение. Аккомодация. Поле зрения .....	143
§ 44. Приборы, увеличивающие угол зрения .....	147
 Упражнения .....	158
<b>Глава 5. Тепловое излучение и фотометрия .....</b>	<b>162</b>
§ 45. Равновесное тепловое излучение .....	162
§ 46. Квантовая гипотеза Планка .....	165
§ 47. Фотометрия .....	167
§ 48. Законы освещённости .....	174
§ 49. Поверхностная яркость .....	178
§ 50. Блеск светила, звёздная величина .....	182
§ 51. Определение расстояний до небесных светил .....	185
§ 52. Абсолютная звёздная величина. Светимость звёзд .....	189
§ 53. Пространственные скорости звёзд .....	193
 Упражнения .....	196
<b>Глава 6. Экспериментальные задания .....</b>	<b>200</b>
Условия экспериментальных задач .....	200
Возможные решения предложенных задач .....	202
<b>Глава 7. Задачи российских физических олимпиад .....</b>	<b>210</b>
Задачи II (муниципального) тура .....	210
Задачи III (областного) тура .....	213
Задачи IV (зонального) тура .....	219
Задачи V (заключительного) тура .....	223
<b>Приложение .....</b>	<b>228</b>
Основные формулы .....	228
Основные схемы с тонкими линзами .....	232
Шкала электромагнитных волн .....	233
Греческий алфавит .....	233
Приставки СИ (десятичные приставки) .....	233

# Используемые обозначения физических величин

Физическая величина	Условное обозначение	Единица измерения
Период	$T$	с (секунда)
Частота	$\nu$	Гц (герц), $1 \text{ Гц} = \frac{1}{\text{с}} = \text{с}^{-1}$
Длина волны	$\lambda$	м (метр)
Фазовая скорость	$v$	м/с
Волновое число	$k$	рад/м
Групповая скорость	$v_{\text{гр}}$	м/с
Скорость света в вакууме	$c$	м/с
Модуль Юнга	$E$	Па (паскаль), $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$
Модуль сдвига	$G$	Па (паскаль)
Плотность вещества	$\rho$	кг/м <sup>3</sup>
Циклическая частота	$\omega$	рад/с
Давление	$p$	Па (паскаль)
Громкость звука	$L$	Б (бел), дБ (децибел)
Показатель преломления	$n$	безразмерная
Линейный угол	$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi$	° (градус), рад (радиан), безразмерная
Видность	$V$	безразмерная
Коэффициент поглощения	$k$	%, часть от 1, безразмерная
Коэффициент отражения	$R$	%, часть от 1, безразмерная
Коэффициент прохождения	$\alpha$	%, часть от 1, безразмерная
Острота зрения	$V$	безразмерная
Угловая дисперсия решетки	$D_{\phi}$	рад/м = $1/\text{м} = \text{м}^{-1}$
Оптическая сила линзы/зеркала	$D$	дптр = $\text{м}^{-1}$ (диоптрия)
Увеличение линзы/зеркала	$\Gamma$	безразмерная
Диаметр линзы (отверстия)	$D$	м
Радиус кривизны линзы/зеркала	$R$	м
Фокусное расстояние линзы/зеркала	$F$	м
Расстояние от предмета до линзы/зеркала	$d$	м
Расстояние линзы/зеркала до изображения	$f$	м
Высота предмета	$h$	м
Высота изображения	$H$	м
Энергия волны	$W$	Дж (джоуль)
Поток энергии излучения	$\Phi$ , или $P$	Вт (ватт), $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$
Световой поток	$\Phi_v$	лм (люмен)
Плотность потока	$j$	Вт/м <sup>2</sup>
Энергия излучения	$Q$	Дж (джоуль)
Световая энергия	$Q_v$	лм·с
Сила света	$I$	кд (кандела)
Освещенность	$E$	лк (люкс)
Телесный угол	$\Omega$	ср (стерадиан)
Яркость светила	$B$	кд/м <sup>2</sup>
Звёздная величина	$m$	безразмерная
Абсолютная звёздная величина	$M$	безразмерная

# Глава 1. Предварительные сведения о волнах

*Ум заключается не только в знании, но и в умении прилагать знание на деле.*

Аристотель

## Введение

Изучая колебания пружинного и математического маятников, мы рассматривали изолированные системы тел. Нередко встречаются взаимосвязанные системы тел, когда колебания одной системы передаются другим колебательным системам. Например, колебания наших голосовых связок при разговоре возбуждают колебания воздуха, которые распространяются по всем направлениям и, достигая ушей других людей, вызывают колебания барабанных перепонки. Последние преобразуются в нервные импульсы и передаются в мозг. Так у человека возникают звуковые ощущения.

Колебания, распространяющиеся в пространстве, называются волнами.

А что же распространяется волнами? Распространяется возмущение. Оно, как правило, связано с переносом энергии и импульса, причём чаще всего без переноса вещества (частицы среды колеблются около положений равновесия, передавая соседним частицам энергию и импульс).

В современной действительности понятие «волны» настолько широко и многозначно, что фактически невозможно указать ни одного признака, общего для всех видов движения или процессов, которые интуиция и традиция относят к волновым.

Скорее всего, первоначально понятие волн ассоциировалось с колебаниями водной поверхности. Характерный признак таких волн – перемещение изменений уровня поверхности на заметные расстояния за счёт колебательного и иногда вращательного движений частиц воды, участвующих в волнообразовании.

Аналогично могут возникать упругие волны в газах, жидкостях, твёрдых телах и перемещаться в пространстве, передавая энергию и импульс за счёт последовательной передачи их от одних частиц другим (без обязательного переноса самих частиц).

Всё это – примеры механических волн. Конечно, механические волны могут распространяться и в условиях общего (дрейфового) сноса среды (ветра, течения и т.п.) и даже сами могут вызывать такой снос. Но роль этих дрейфов во многих случаях пассивна, ибо они, видоизменяя характер волн, не влияют на саму возможность их существования. Для существования механических волн необходима упругая среда, ибо волны, по сути, есть возмущение параметров этой среды.

Чрезвычайно широк класс так называемых электромагнитных волн. К электромагнитным волнам относятся радиоволны в очень широком диапазоне частот, оптические волны (которые подразделяются на инфракрасное, видимое и ультрафиолетовое излучение), рентгеновские лучи и гамма-лучи.

Все электромагнитные волны представляют собой распространяющееся в пространстве возмущение электромагнитного поля.

В электромагнитной волне происходят поперечные синхронные колебания вектора напряжённости электрического поля и вектора магнитной индукции магнитного поля волны.

Удивительно, что любые электромагнитные волны могут распространяться не только в различных средах, но и в вакууме! В вакууме электромагнитные волны движутся со скоростью, равной почти триста тысяч километров в секунду ( $c \approx 3 \cdot 10^8$  м/с)! Причём с такой скоростью движутся в вакууме электромагнитные волны любой частоты.

Около 90% всей информации человек получает именно с помощью электромагнитных волн и в первую очередь с помощью света. То есть информация распространяется в основном электромагнитными волнами.

Существуют также гравитационные волны, то есть изменение гравитационного поля, распространяющееся со скоростью света. Гравитационные волны излучаются массивными телами, движущимися с переменным ускорением. Воздействуя на тела, гравитационные волны должны вызывать их деформацию. Однако интенсивность гравитационных волн чрезвычайно мала, и они крайне слабо взаимодействуют с веществом. Впервые гравитационные волны были непосредственно обнаружены в сентябре 2015 года двумя детекторами-близнецами обсерватории LIGO, на которых были зарегистрированы гравитационные волны, возникшие, вероятно, в результате слияния двух чёрных дыр массами 36 и 29 солнечных масс и образования одной вращающейся чёрной дыры массой 62 солнечных массы на расстоянии около 1,3 миллиарда световых лет от нас. При этом излучённая при слиянии за десятки доли секунды энергия эквивалентна 3-м солнечным массам.

Распространение волн в веществе всегда сопровождается потерями (диссипацией) энергии. При этом часть энергии колебаний переходит во внутреннюю энергию вещества. Но в случае не очень больших потерь процесс сохраняет волновой характер.

С другой стороны, в активных средах (содержащих источники энергии) передача возмущений может сопровождаться их «подпиткой» от этих источников. Причём «подпитка» может почти полностью определять характер процесса. Такие процессы называются автоволнами. Они имеют большое значение в биологии.

Примерами автоволн являются: распространение фронта огня, который бежит по горящему полю травы; распространение импульса возбуждения по нервному волокну; популяционные автоволны; распространение эпидемий и генов; ряд костяшек домино, которые последовательно падают, если уронить крайнюю.

Итак, понятие «волны» охватывает чрезвычайно разнообразные движения любой природы. Но мы будем преимущественно изучать волны, обусловленные источниками, совершающими гармонические колебания. Причём мы будем рассматривать только два вида волн: механические и электромагнитные волны.

***Волны – это возмущения, распространяющиеся с конечной скоростью в пространстве, несущие с собой энергию и импульс без переноса вещества.***

Волновой процесс представляет собой процесс переноса в пространстве возмущений (энергии, импульса, информации) посредством колебаний.

Волны – это колебания, распространяющиеся в пространстве.

## § 1. Механические волны

Волны бывают продольные и поперечные. В продольных механических волнах частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны, а в поперечных волнах – перпендикулярно направлению распространения волн.

**Продольные волны.** Процесс распространения продольных волн рассмотрим на модели, состоящей из шариков массой  $m$ , соединённых между собой пружинами жёсткостью  $k$ . Пусть вся система шариков и пружин накинута на гладкий стержень (рис. 1).

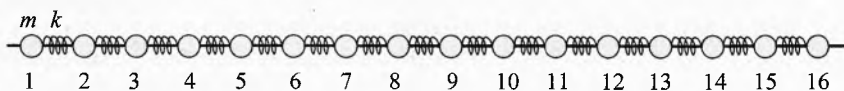


Рис. 1. Распространение продольных механических волн

Приведём первый шар в колебательное движение с периодом  $T$  и амплитудой  $X_m$ . Двигаясь вправо, он будет сжимать первую пружину, которая приведёт в движение второй шар, который, в свою очередь, сжимая вторую пружину, приведёт в движение третий шар и т.д. Но шар 2 начнёт движение позднее шара 1, шар 3 – позднее шара 2 и т.д.

Спустя четверть периода  $T/4$  шар 1 сместится вправо на максимальное расстояние, равное амплитуде колебаний, и остановится. Шар 2 сместится от своего положения равновесия на меньшее расстояние, шар 3 – ещё на меньшее и т.д. И пусть к этому моменту шар 5 только начнёт движение, а все последующие вообще пока не начнут двигаться.

По истечении промежутка времени  $T/2$  после начала движения шар 1 опять окажется в положении равновесия, но будет двигаться уже в обратном направлении. При этом волна сжатия к этому моменту дойдёт уже до шара 9.

Продолжая двигаться влево, шар 1 будет растягивать первую пружину, увлекая за собой шар 2, который, в свою очередь, растягивая вторую пружину, будет тянуть за собой шар 3 и т.д. То есть появится новая волна растяжений, перемещающаяся вправо вслед за волной сжатия, которая к моменту времени  $3T/4$  дойдёт до шара 13. К этому моменту шар 1 сместится влево на максимальное расстояние, равное амплитуде колебаний.

Спустя период после начала движения шар 1 не только вернётся в положение равновесия, но и будет двигаться в том же направлении, что и в самом начале. При этом волна сжатия дойдёт до шара 17, а волна растяжения – до шара 9. Продолжая движение вправо, шар 1 породит новую волну сжатия, а ещё через половину периода – волну растяжения и т.д.

*Длина волны  $\lambda$  – расстояние, на которое распространится волна за период колебаний одной частицы. В случае продольных волн длина волны равна минимальному расстоянию между сгущениями или разрежениями частиц среды.*

На рис. 2 длина волны составляет 16 шаров.

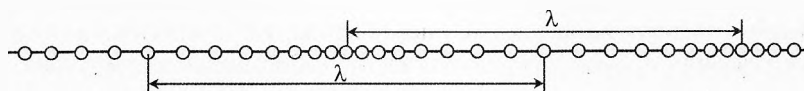


Рис. 2. Длина продольной волны

**Поперечные волны.** Теперь рассмотрим механизм возникновения поперечных волн на следующей модели.

Возьмём систему шариков одинаковой массы, соединённых пружинами одинаковой жёсткости, и подвесим шарики на нитях, как показано на рис. 3.

Приведём первый шарик в колебательное движение перпендикулярно плоскости рисунка. Благодаря упругой связи между шариками они придут в колебательное движение. При этом волна будет распространяться вдоль шнура, поперёк направлению колебаний шариков.

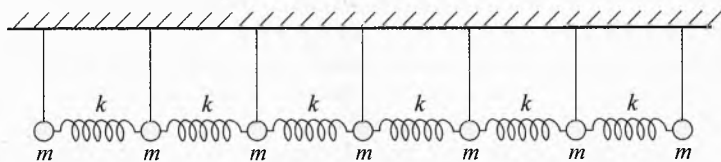


Рис. 3. Поперечные механические волны

Если крайний шарик будет совершать вынужденные гармонические колебания, то и каждый шарик шнура тоже будет совершать гармонические колебания, но только с запаздыванием по времени. См. вид сверху на рис. 4.

■ **Направление, в котором распространяется волна, называется лучом.**

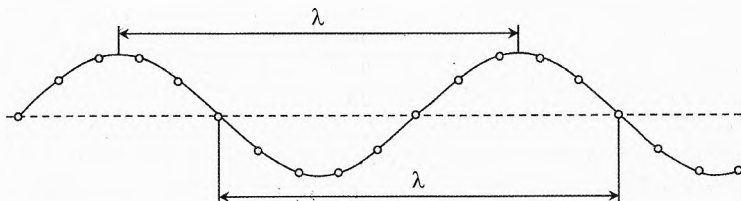


Рис. 4. Длина поперечной волны

■ Скорость, с которой распространяется определённое состояние (фаза) волны (например, сгущение или разрежение в случае продольных волн и гребень или впадина в случае поперечных волн) называется **фазовой скоростью  $v$  волны**.

Поскольку за один период колебаний частиц среды волна распространяется на расстояние, равное длине волны  $\lambda$ , то фазовая скорость волны равна отношению длины волны к периоду колебаний:

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

а длина волны равна произведению фазовой скорости и периода колебаний:

$$\lambda = v \cdot T$$

**Частота колебаний частиц среды называется частотой волны и обозначается буквой  $\nu$  (ню).**

Частота волны равна величине обратной периоду колебаний:

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Значит, скорость волны равна произведению длины волны и её частоты:

$$v = \lambda \cdot \nu$$

а длина волны равна отношению фазовой скорости к частоте волны:

$$\lambda = \frac{v}{\nu}$$

## § 2. Механические волны в упругих средах.

### Скорость звука

Твёрдые, жидкие и газообразные среды можно представить в виде модели, состоящей из отдельных частиц, взаимодействующих между собой силами упругости. Такая модель аналогична рассмотренным выше моделям из шариков и пружинок. Поэтому при возбуждении колебаний в некоторой точке упругой среды благодаря силам упругости вынужденные колебания распространяются на все близлежащие частицы, и волна всё дальше распространяется от источника.

**Скорость продольных волн в газах.** Рассмотрим процесс возникновения механической волны в воздухе. Закрепим стальную пластину в тисках и ударом приведём её в колебательное движение (рис. 5). В результате чего по разные стороны от пластины образуются сменяющие друг друга разрежения и сжатия

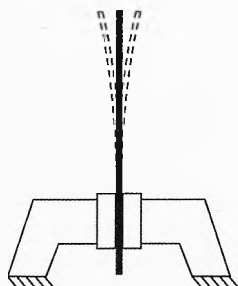


Рис. 5. Возникновение звуковых колебаний

воздуха. При сжатии близлежащей к пластинке порции воздуха в ней увеличивается давление на  $\Delta p$  и возрастает плотность на  $\Delta \rho$ . Сжатый воздух расширяется и вызывает сжатие прилегающего к нему слоя воздуха.

Вычисления показывают, что скорость продольной волны в воздухе зависит от давления газа, его плотности и показателя адиабаты, зависящего от состава газа:

$$v_{\parallel} = \sqrt{\gamma \cdot \frac{p}{\rho}}$$

где  $p$  – давление газа,  $\rho$  – плотность,  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  – показатель адиабаты,  $C_p$  и  $C_v$  – молярная теплоемкость газа при постоянном давлении и объеме.

*Волны в газах могут быть только продольными. Продольные механические волны могут распространяться в любых средах, испытывающих упругую деформацию на растяжение и сжатие.*

**Скорость продольных волн в жидкостях и твёрдых телах.** Выведем формулу для скорости распространения продольной волны в твёрдом (или жидком) теле.

Для возбуждения в стержне продольной волны можно, например, ударить по его торцу молотком (рис. 6). В результате стержень деформируется на величину

$$\Delta l = u \cdot \Delta t,$$

где  $u$  – скорость, приобретенная частицами стержня при ударе,  $\Delta t$  – время удара (время действия силы  $\vec{F}$ ).

За время  $\Delta t$  фронт возбужденной при деформации стержня продольной волны переместится на расстояние

$$l = v_{\parallel} \cdot \Delta t,$$

где  $v_{\parallel}$  – скорость распространения продольных волн.

Следовательно, за время  $\Delta t$  в колебательное движение приходит часть стержня массой

$$\Delta m = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot l = \rho \cdot S \cdot v_{\parallel} \cdot \Delta t,$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения стержня,  $\rho$  – плотность стержня.

По второму закону Ньютона импульс силы  $F \cdot \Delta t$  равен изменению импульса той части стержня, которая пришла в движение за время удара:

$$F \cdot \Delta t = \Delta(mu) = \Delta m \cdot u = \rho \cdot S \cdot v_{\parallel} \cdot u \cdot \Delta t \quad \text{или} \quad F = \rho \cdot S \cdot v_{\parallel} \cdot u.$$

Сила удара и деформация стержня связаны законом Гука:

$$\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l},$$

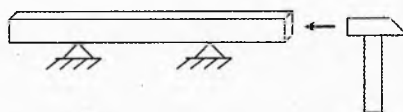


Рис. 6. Возбуждение продольных колебаний в стержне



где  $E$  – модуль Юнга для материала стержня, причём  $l$  – только та часть стержня, до которой уже дошла волна деформации. Отсюда:

$$F = \frac{ES \cdot \Delta l}{l} = \frac{ES u \Delta t}{v_{\parallel} \Delta t} = \frac{ESu}{v_{\parallel}}.$$

Сравнивая оба выражения для  $F$ , получим:

$$\frac{ESu}{v_{\parallel}} = \rho S v_{\parallel} u.$$

Значит, скорость распространения продольной волны в твёрдом (или жидком) теле обратно пропорциональна корню отношения модуля Юнга и плотности вещества:

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

✎ **Пример 1.** Вычислить скорость продольных волн в стали. Плотность стали  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , модуль Юнга  $E = (1,9 \div 2,1) \cdot 10^{11} \text{ Па}$ .

→ **Решение.**  $v_{\parallel \min} = \sqrt{\frac{1,9 \cdot 10^{11}}{7,8 \cdot 10^3}} = 4935 \text{ м/с} \approx 4,9 \text{ км/с}.$

$v_{\parallel \max} = \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^{11}}{7,8 \cdot 10^3}} = 5189 \text{ м/с} \approx 5,2 \text{ км/с}.$  ←

✓ **Ответ.** Скорость продольных волн в стали в зависимости от марки составляет от 4,9 до 5,2 км/с.

### Скорость поперечных волн.

*Поперечные механические волны распространяются только в средах, испытывающих упругую деформацию сдвига (твёрдые тела и поверхностные пленки жидкостей).*

Скорость поперечных волн вычисляется по формуле:

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

где  $G$  – модуль сдвига,  $\rho$  – плотность вещества.

Модуль сдвига для любых твёрдых тел меньше модуля Юнга в  $2 \div 3$  раза, поэтому поперечные волны в твёрдых телах распространяются существенно медленнее, чем продольные.

✎ **Пример 2.** Вычислить скорость поперечных волн в стали. Плотность стали  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , модуль сдвига  $G = (77 \div 81) \text{ ГПа}$ .

→ **Решение.**  $v_{\perp \min} = \sqrt{\frac{77 \cdot 10^9}{7,8 \cdot 10^3}} \approx 3,14 \text{ км/с}$ ;  $v_{\perp \max} = \sqrt{\frac{81 \cdot 10^9}{7,8 \cdot 10^3}} \approx 3,22 \text{ км/с}$ . ←

✓ **Ответ.** Скорость поперечных волн в стали составляет от 3,14 до 3,22 км/с.

Мы получили, что средняя скорость продольных волн в стали в 1,6 раза больше скорости поперечных волн:

$$\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} = \frac{5,06 \text{ км/с}}{3,18 \text{ км/с}} \approx 1,6.$$

Поэтому если вы ударите молотком по рельсу железнодорожного пути, то ваш товарищ, приложивший ухо к рельсу на расстоянии 1 км, услышит тройной удар. Через 0,2 с до его уха дойдёт продольная волна, через 0,3 с – поперечная волна, а через 3 секунды он, возможно, услышит звуковой удар по воздуху.

При землетрясении по запаздыванию прихода поперечных волн относительно продольных рассчитывают, на каком расстоянии от сейсмостанции находится эпицентр землетрясения.

### § 3. Уравнение бегущей волны

Рассмотрим простейший вариант волны: плоскую бегущую волну. Модель плоской волны можно показать на школьном оборудовании. Установка состоит из ванны с пологими краями, на которые кладем ткань,

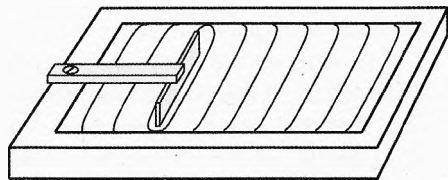


Рис. 7. Бегущая волна

В ванну нальём воду и над её поверхностью закрепим вибратор. К нему подсоединим длинную плоскую лопаточку, опущенную в воду. Включим вибратор (рис. 7). Он вызывает колебания лопаточки и близлежащих слоёв воды, которые, в свою очередь, передают колебания дальше – соседним слоям воды и т.д.

**Амплитуда колебаний  $X_m$  в плоской волне** – это высота гребня или глубина впадины относительно свободной невозмущённой поверхности воды.

Амплитуду колебаний иногда обозначают буквой  $A$ :  $X_m = A$ .

В плоской волне амплитуда колебаний остаётся практически неизменной на значительных расстояниях от источника. И если колебания источника при этом происходят по гармоническому закону  $x = X_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$ , где  $\omega$  – циклическая частота (скорость изменения фазы колебаний), то по такому же

закону будут происходить колебания в поверхностных слоях воды, но только с запаздыванием по фазе в зависимости от расстояния до источника.

Если  $v$  – фазовая скорость волны, то на расстоянии  $y$  от источника запаздывание будет составлять  $\tau = \frac{y}{v}$ . Тогда на расстоянии  $y$  вдоль поверхности воды вертикальное смещение точек поверхности воды будет описываться уравнением:

$$x = X_m \cos[\omega(t - \tau)] \quad \text{или} \quad x = X_m \cos[\omega(t - \frac{y}{v})]$$

Это и есть **уравнение бегущей плоской волны**, описывающее вертикальное смещение  $x$  в любой точке на расстоянии  $y$  от источника в любой момент времени  $t$ .

Проанализируем некоторые случаи.

1. Пусть  $t = \text{const}$ , то есть возьмём фиксированный момент времени  $t_1$ . Тогда из уравнения волны можно узнать чему равно вертикальное смещение поверхности на любом расстоянии  $y$  от источника:

$$x = X_m \cos[\omega(t_1 - \frac{y}{v})] \quad \text{при} \quad t_1 = \text{const.}$$

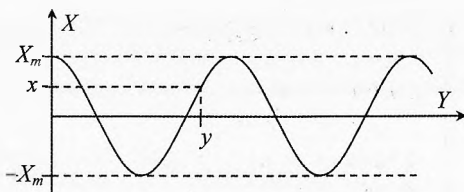


Рис. 8. «Фотография» волны ( $t_1 = \text{const}$ )

Это есть не что иное, как фотография волны (рис. 8) (например, как на картине И. К. Айвазовского «Девятый вал»).

2. Теперь сосредоточим своё внимание на некоторой точке с координатой  $y_2$ , тогда уравнение волны в этой точке:

$$x = X_m \cos[\omega(t - \frac{y_2}{v})] \quad \text{при} \quad y_2 = \text{const.}$$

Подставляя в это уравнение любое значение времени  $t$ , мы получим смещение  $x$  поверхности в рассматриваемой точке в этот момент времени. Это уравнение описывает колебания  $x$  в одной фиксированной точке  $y_2$ .

Преобразуем уравнение волны к следующему виду:

$$x = X_m \cos[\omega t - \frac{\omega}{v} y] \quad \text{или} \quad x = X_m \cos[\omega t - k y]$$

Величина  $k = \frac{\omega}{v}$  называется **волновым числом**. Волновое число равно разности фаз по лучу на расстоянии одного метра.

Волновое число показывает, на сколько радиан отстает фаза колебаний волны в точке, находящейся на 1 м дальше от источника по направлению распространения волны:

$$[k] = \frac{\text{рад/с}}{\text{м/с}} = \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

**Волновая поверхность** – это геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе.

При определённом значении  $y$  для всех значений  $z$  смещение  $x$  одинаково. То есть волновая поверхность плоской волны – плоскость, расположенная перпендикулярно фазовой скорости волны (перпендикулярно лучу) (пункт на рис. 9).

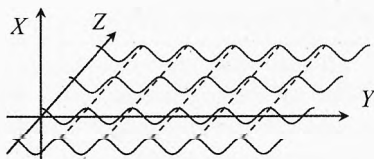


Рис. 9. Плоская поперечная волна

**Фронт волны** – это передняя волновая поверхность, то есть это граница между возмущённой данным источником и невозмущённой областями пространства.

**Длина волны** – это расстояние по лучу между точками, колеблющимися с разностью фаз  $2\pi$ .

**Длина волны** – это минимальное расстояние по лучу между точками, колеблющимися синхронно.

В этих точках одновременно достигаются максимальные смещения вверх и вниз, а также любые другие соответствующие состояния.

Обращаем внимание, что о точках, отстоящих по лучу на расстоянии, равном длине волны  $\lambda$ , можно сказать, что колебания в них происходят синхронно, но неверно говорить, что колебания в них происходят в одинаковой фазе, ибо разность фаз для них составляет  $2\pi$  радиан, а не 0.

## § 4. Энергия волны, поток энергии, плотность потока энергии

**Энергия волны.** Механические волны передают энергию от источника в направлении распространения волны. Эта энергия складывается из кинетической энергии частиц и потенциальной энергии (энергии взаимодействия частиц среды).

Полная энергия гармонических колебаний частиц среды при отсутствии потерь на трение сохраняется; происходит только преобразование кинетической энергии в потенциальную и наоборот. При этом максимальная кинетическая энергия некоторой массы вещества равна максимальной потенциальной энергии.

Полная энергия колебаний среды массы  $m$ , как было получено при рассмотрении механических колебаний груза на пружине:

$$W = \frac{mX_m^2\omega^2}{2},$$

где  $X_m$  – амплитуда колебаний частиц среды,  $\omega$  – циклическая частота колебаний.

Среда массы  $m$ , получая от источника энергию, передаёт её в форме волн другим слоям среды.

**Поток энергии** – скалярная величина, характеризующая быстроту передачи энергии волнами через некоторую поверхность. Поток энергии равен отношению энергии к промежутку времени, за который она проходит через эту поверхность:

$$P = \frac{W}{t}, \quad [P] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}.$$

Поток энергии обычно обозначается буквой  $\Phi$ , но мы будем чаще обозначать его буквой  $P$ , поскольку у потока тепла такая же размерность и схожий смысл, как и у мощности.

**Плотность потока энергии** – скалярная величина, характеризующая распределение потока энергии по волновой поверхности. Она равна отношению потока энергии к площади поверхности, перпендикулярной лучам, через которую распространяется этот поток:

$$j = \frac{P}{S_{\perp}}, \quad [j] = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Учитывая выражение для потока энергии, запишем:

$$j = \frac{W}{S_{\perp} t}.$$

Если за 1 с через  $1 \text{ м}^2$  волновой поверхности распространяется энергия 1 Дж, то плотность потока энергии равна

$$1 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \quad \text{или} \quad 1 \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2}.$$

В случае плоской бегущей волны плотность потока энергии остаётся неизменной, если можно пренебречь диссипацией энергии, так как площадь поверхности распространения остаётся неизменной по мере распространения волны, а энергия не рассеивается и не поглощается, и вся распространяется в пределах волновой поверхности. Реально диссипация энергии происходит всегда, но ею часто можно пренебречь. В таких случаях амплитуда колебаний в плоских волнах практически неизменна.

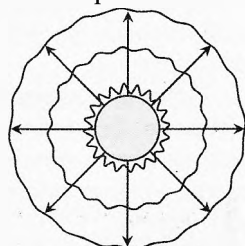


Рис. 10. Сферическая волна

**Сферические волны.** Поместим в сплошную среду (например, в воду) пульсирующий шар, радиус которого равен  $r_0$ . Вокруг него возникнут продольные волны со сферическими волновыми поверхностями. Лучи этих волн будут направлены по радиусам пульсирующего шара (рис. 10).

В отличие от плоской волны, даже при отсутствии потерь энергии на диссипацию, амплитуда сферической волны будет уменьшаться обратно пропорционально расстоянию  $r$  от центра источника, а плотность потока энергии – квадрату расстояния.

Действительно, пусть шарообразный источник излучает поток энергии, равный  $P_0$ . Тогда плотность потока энергии  $j_0$  у поверхности источника:

$$j_0 = \frac{P_0}{S_0} \quad \text{или} \quad P_0 = j_0 \cdot S_0,$$

где  $S_0 = 4\pi r_0^2$  – площадь поверхности источника.

Рассмотрим сферическую волновую поверхность на расстоянии  $r$  от центра источника. Плотность потока энергии в каждой точке этой сферы одинакова и равна  $j$ . Тогда поток энергии, проходящей через эту поверхность, равен:

$$P = j \cdot S,$$

где  $S = 4\pi r^2$  – площадь рассматриваемой волновой поверхности.

При отсутствии потерь весь поток энергии, излучаемой источником, проходит через эту поверхность. Поэтому

$$P = P_0.$$

Значит,

$$j \cdot S = j_0 \cdot S_0 \quad \text{или} \quad j \cdot 4\pi r^2 = j_0 \cdot 4\pi r_0^2.$$

Итак, плотность потока энергии сферической волны убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от центра источника:

$$\frac{j}{j_0} = \frac{r_0^2}{r^2}. \quad (1)$$

С другой стороны, плотность потока энергии пропорциональна квадрату амплитуды колебаний в данной точке, то есть:

$$\frac{j}{j_0} = \frac{X_m^2}{X_{m0}^2}. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), видим:

$$\frac{X_m}{X_{m0}} = \frac{r_0}{r}.$$

Амплитуда колебаний сферической волны убывает обратно пропорционально расстоянию от центра источника.

Например, если радиус пульсирующего шара равен 1 см, то на расстоянии 1 м амплитуда колебаний уменьшится в 100 раз по сравнению с амплитудой колебаний у поверхности шара. При этом плотность потока энергии волны на таком же расстоянии уменьшится в 10 000 раз.

**Плотность потока энергии и объёмная плотность энергии волн.**

*Объёмная плотность энергии  $w$  в данной точке пространства равна отношению малой энергии  $\delta W$  к малому объёму  $\delta V$ , в котором в данный миг находится эта энергия:*

$$w = \frac{\delta W}{\delta V}.$$

Значит, в объёме  $\delta V$  в данный миг находится энергия  $\delta W$ :

$$\delta W = w \delta V. \quad (3)$$

При скорости распространения волны  $v$  вся эта энергия, сосредоточенная в объёме  $\delta V$ , должна выйти через волновую поверхность площадью  $S$  за время  $\Delta t$ :

$$\delta V = S \cdot v \cdot \Delta t. \quad (4)$$

С другой стороны при плотности потока энергии  $j$  через волновую поверхность площадью  $S$  вдоль направления распространения волны за время  $\Delta t$  пройдёт энергия  $\delta W$ :

$$\delta W = j \cdot S \cdot \Delta t. \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (3), получим:

$$j \cdot S \cdot \Delta t = w \cdot S \cdot v \cdot \Delta t \quad \text{или} \quad j = w \cdot v.$$

Плотность потока энергии волны равна произведению объёмной плотности энергии волны и скорости распространения волны.

Это выражение можно записать в векторном виде:

$$\vec{j} = w \vec{v}. \quad (6)$$

*Вектор плотности потока энергии волн называется **вектором Умова-Пойнтинга**. По направлению он совпадает с направлением переноса энергии волн. Вектор Умова-Пойнтинга численно равен энергии, передаваемой за единицу времени через единицу площади волновой поверхности, перпендикулярной к направлению переноса энергии.*

В свою очередь, объёмная плотность энергии волны пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, значит, плотность потока энергии тоже пропорциональна квадрату амплитуды колебаний волны:

$$j = \alpha \cdot X_m^2.$$

где  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности.

Эти формулы не зависят от природы волны и для всех волн одинаковы.

В случае монохроматичной волны (когда колебания происходят только с одной фиксированной частотой) под скоростью  $v$  имеется в виду фазовая скорость волны. В случае распространения группы волн различной частоты может оказать-

ся, что волны разной частоты распространяются с разной скоростью. В этом случае в уравнении (6) под скоростью  $v$  понимается так называемая групповая скорость, то есть усреднённая скорость группы волн, определяющая плотность потока энергии, переносимой этой группой волн.

## § 5. Стоячие волны

Возьмём резиновый шнур (рис. 11). Прикрепим его к стене и взмахом руки пустим по нему одиночный импульс. Этот импульс добежит до стенки, несколько ослабнув, отразится и, зеркально поменяв форму, будет возвращаться назад с такой же скоростью.

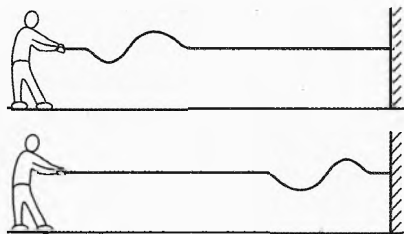


Рис. 11. Бегущая волна

Если незакрепленный конец шнура заставить совершать вынужденные гармонические колебания, то по шнуру побежит волна. Эта волна называется прямой или падающей. Достигнув закрепленного конца, волна отразится и побежит в обратном направлении. А в прямом направлении будет продолжать двигаться падающая волна. В результате колебания каждой точки шнура будут складываться как колебания, создаваемые двумя источниками (на одном конце рука, а на другом – отраженная от стенки волна).

Частоты и скорости прямой и отраженной волн одинаковы. Но фазы колебаний этих волн, приходящих в данную точку шнура, различны, что обусловлено, во-первых, разным расстоянием, которое проходят прямая и отраженная волны до данного участка шнура. А во-вторых, при отражении от закрепленного конца к фазе отраженной волны сразу добавляется  $\pi$  радиан (при подходе к точке закрепления частицы шнура при свободном шнуре начинали бы двигаться, например, вверх, но, наткнувшись на преграду, они сразу начинают двигаться вниз, аналогично тому, как упругий шарик при лобовом столкновении со стеной меняет направление скорости на противоположное).

При сложении прямой и отраженной волн одинаковой частоты и амплитуды может возникнуть так называемая **стоячая волна** (рис. 12).

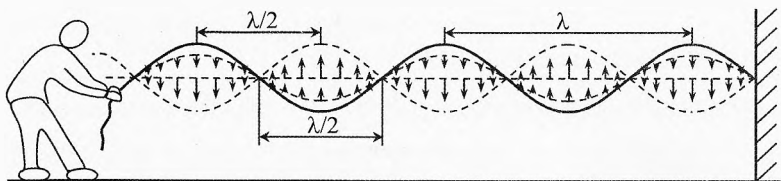


Рис. 12. Стоячая волна



В стоячей волне наблюдаются точки, где колебания практически отсутствуют. Такие точки называются **узлами**. Между узлами наблюдаются колебания. Причём между двумя соседними узлами все частицы шнура колеблются в одинаковой фазе, но с разными амплитудами. Максимальная амплитуда колебаний наблюдается посередине между узлами. Эти участки называются **пучностями**. Ближе к узлу частицы шнура колеблются со все меньшей амплитудой.

Форма шнура между соседними узлами имеет вид полусинусоиды. Рядом с этой полусинусоидой (полуволной) происходят такие же колебания, только в противоположном направлении (в противофазе). Наблюдаются поперечные колебания, но гребни и впадины не перемещаются по шнуру.

В момент, когда в соседних полуволнах смещения частиц шнура максимальны, можно увидеть или сфотографировать синусоидальную волну.

Через четверть периода частицы достигнут своих максимальных скоростей (разных для разных участков полуволны и противоположных по направлению для соседних полуволн). В этот момент шнур представляет собой прямой отрезок. Вся энергия колебаний шнура в этот момент сосредоточена в форме кинетической энергии частиц шнура. При этом деформация шнура отсутствует.

Ещё через четверть периода смещения частиц шнура будут вновь максимальными. Вся энергия колебаний шнура в этот момент сосредоточена в форме потенциальной энергии упругости растянутых участков шнура. Причём наибольшую деформацию испытывают в этот момент участки вблизи узлов, поэтому большая часть энергии волны сосредоточена на участках вблизи узлов.

**Уравнение стоячей волны.** Выведем уравнение стоячей волны при гармонических колебаниях упругого шнура или струны длиной  $l$  (рис. 13).

Стоячая волна является результатом наложения двух бегущих волн одной и той же частоты, распространяющихся в противоположных направлениях.

Волна, бегущая справа налево:

$$x_1 = X_m \sin\left[\omega\left(t + \frac{y}{v}\right)\right].$$

Волна, бегущая слева направо:

$$x_2 = -X_m \sin\left[\omega\left(t - \frac{y}{v}\right)\right].$$

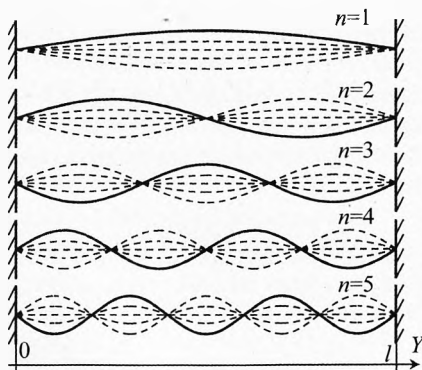


Рис. 13. Стоячая волна

Согласно принципу суперпозиции, результатом наложения волн будет:

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{или} \quad x = X_m \sin\left[\omega\left(t + \frac{y}{v}\right)\right] - X_m \sin\left[\omega\left(t - \frac{y}{v}\right)\right].$$

Используя формулу  $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$  и учитывая, что  $\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi}{\lambda}$ , получим **уравнение стоячей волны**:

$$x = 2X_m \cdot \sin\left(\frac{\omega}{v} \cdot y\right) \cdot \cos(\omega t), \text{ или } x = 2X_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot y\right) \cdot \cos(\omega t).$$

Мы получили, что все точки струны совершают гармонические колебания. Причём каждая точка струны колеблется со своей амплитудой  $A$ .

$$x = A \cdot \cos(\omega t), \text{ где } A = 2X_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot y\right).$$

В стоячей волне существуют неподвижные точки, которые называются узлами ( $A_{\text{узла}} = 0$ ). Посередине между узлами находятся точки, которые колеблются с максимальной амплитудой. Эти точки называются пучностями ( $A_{\text{пучности}} = 2X_m$ ).

Оба неподвижных конца струны должны быть узлами.

Полученная формула удовлетворяет этому условию на левом конце: при  $y = 0$  амплитуда колебаний  $A = 0$ .

Для выполнения этого условия и на правом конце ( $y = l$ ) необходимо, чтобы

$$2X_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot l\right) = 0, \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \cdot l = n\pi, \text{ где } n - \text{любое целое число.}$$

Это означает, что стоячая волна в струне возникает не всегда, а только в том случае, когда длина  $l$  струны равняется целому числу полуволин, то есть

$$l = n \cdot \frac{\lambda}{2}, \text{ где } n = 1, 2, 3 \dots$$

Таким образом, в шнуре длиной  $l$  стоячие волны могут возникать только с определёнными длинами волны  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{2l}{n}, \text{ где } n = 1, 2, 3 \dots$$

Если скорость распространения волны в шнуре  $v$ , то частота возможных стоячих колебаний может принимать значения:

$$v = \frac{v}{\lambda} \Rightarrow v = \frac{v}{2l} \cdot n, \text{ где } n = 1, 2, 3 \dots$$

Эти частоты называются **собственными частотами** колебательной системы (натянутого шнура или струны).

Если внешний источник колебаний создает возмущения на одной из собственных частот системы, то эта система начинает откликаться (резонировать), возникают стоячие волны. Амплитуда колебаний стоячих волн будет зависеть от мощности источника и интенсивности потерь энергии в системе.

Чисто стоячая волна, строго говоря, может существовать только при отсутствии потерь и полном отражении волн от границы. Обычно, кроме стоячих волн, в среде присутствуют и бегущие волны, подводящие энергию к местам её поглощения или излучения.

Примерами стоячей волны могут служить колебания струны на гитаре, колебания воздуха в трубах органа.

Возникновение стоячих волн на собственной частоте можно легко наблюдать, разместив рядом две гитары. Если на первой гитаре дернуть, например, самую вы-

сокую струну, то она будет колебаться на собственной частоте. Эти колебания будут передаваться по воздуху в виде звука. При этом на второй гитаре сама может начать колебаться (и даже звучать) точно такая же струна, которая начнёт резонировать с такой же струной первой гитары. Все остальные струны обеих гитар резонировать не будут, т.к. их собственные частоты отличаются.



## Упражнения

**1** Вдоль оси  $X$  в положительном направлении распространяется плоская электромагнитная волна с длиной волны  $\lambda = 4$  м. Чему равна фаза колебаний электрического поля в точке с координатами  $x = 1$  м,  $y = 2$  м,  $z = 3$  м в момент, когда в начале координат фаза равна нулю?

**2** Скорость электромагнитной волны в среде от некоторого источника составляет  $v = 2,7 \cdot 10^8$  м/с. Определить период колебаний источника, если на пути  $S = 270$  мкм укладывается  $N = 500$  длин волн.

**3** Сколько радиостанций с полосой пропускания  $\Delta\nu = 30$  кГц можно разместить в диапазоне от  $\lambda_1 = 200$  м до  $\lambda_2 = 500$  м, чтобы обеспечить хорошую избирательность?

**4** На какое количество частот может быть настроен радиоприемник FM-диапазона (ультракороткие волны с частотой модуляции 87,5–108 МГц), если шаг поиска радиостанции 100 кГц?

**5** Высота Останкинской телевизионной башни –  $h = 540$  м, радиус Земли  $R = 6371$  км. Определить на каком расстоянии телеканалы принимаются без ретрансляции.

**6** На какой высоте над Землёй следует расположить три спутника, чтобы с их помощью можно было обеспечить телевидение в любой точке Земли? Каков должен быть период обращения этих спутников вокруг Земли?

**7** Среднее расстояние от Земли до Луны составляет  $r = 380\,000$  км. Космический аппарат луноход передаёт изображение рельефа Луны. Можно ли с Земли управлять Луноходом? На сколько запаздывает сигнал, подаваемый оператором, находящимся на Земле?

**8** Найдите резонансные частоты для полуволнового вибратора длиной  $l = 145$  см.

**9** Как связано волновое число с длиной волны?

**10** В опыте Майкельсона с восьмигранным зеркалом расстояние между двумя горными вершинами, где были расположены вогнутые зеркала, составляло  $l = 35\,373,21$  м. При частоте вращения восьмигранного зеркала, равной  $n = 528$  об/с, в окуляре наблюдался первый просвет. Вывести соответствующую формулу для определения скорости света и найти по этим данным экспериментальное значение этой величины.

## Решения, указания и ответы для самоконтроля

**1**  $\varphi = 2\pi \cdot \frac{x}{\lambda} = 0,5\pi$ . В такой плоской волне фаза не зависит от  $y$  и  $z$ .

**2**  $\lambda = \frac{S}{N}$ ,  $v = \frac{v}{\lambda}$ ,  $T = \frac{1}{v}$ ;  $\Rightarrow T = \frac{S}{v \cdot N} = 2 \cdot 10^{-15}$  с.

**3**  $v_1 = \frac{c}{\lambda_1}$ ,  $v_2 = \frac{c}{\lambda_2}$ ,  $\Rightarrow v_1 - v_2 = \frac{c}{\lambda_1} - \frac{c}{\lambda_2} = 900$  кГц. Значит, разместить можно

не более 31 радиостанций.

**4** 206 частот.

**5** По теореме Пифагора:  $(R+h)^2 = R^2 + r^2$   
 $\Rightarrow r = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} = \sqrt{2Rh + h^2} \approx \sqrt{2Rh} = 83$  км.

**6** Каждый спутник должен покрывать не менее  $\Delta\varphi = 360^\circ/3 = 120^\circ$  долготы (рис. 14). Тогда  $\cos 60^\circ = \frac{R}{R+h}$ ;  $\Rightarrow h = R = 6371$  км. Сила тяжести создает центростремительное ускорение спутнику:  $ma_n = F_r$ ;  $F_r = \frac{GmM}{(R+h)^2}$ ;  $a_n = \omega^2(R+h)$ ;

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ ;  $\Rightarrow T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{8R^3}{GM}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{8R}{g}} = 4$  ч.

**7** Можно. Сигнал достигает лунохода за  $t = r/c = 1,27$  с.

**8**  $l = \lambda_1/2$ ,  $v_1 = c/\lambda_1 = 103$  МГц.  $v_{\text{рез}} = (2n-1) \cdot v_1$ , где  $n = 1, 2, 3 \dots$  – количество полувольт, уместающихся на длине вибратора.

**9** Волновое число равно  $k = \frac{\omega}{v}$ , где циклическая частота  $\omega = 2\pi\nu$ , а скорость волн  $v = \lambda \cdot \nu$ . Из трёх выражений следует  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

**10** Для попадания света от источника в окуляр необходимо, чтобы в моменты отражения света от верхнего и нижнего зеркал они были расположены горизонтально (рис. 15). Свет, отразившись от верхнего зеркала, проходит до нижнего зеркала расстояние  $2l$  за время  $t = \frac{2l}{c}$ . За это время восьмигранное зеркало должно повернуться ровно на  $1/8$  часть оборота, чтобы снова стать горизонтальным. Значит,  $n \cdot t = 1/8$ . Тогда,  $c = 16 \cdot n \cdot l = 2,988 \cdot 10^8$  м/с.

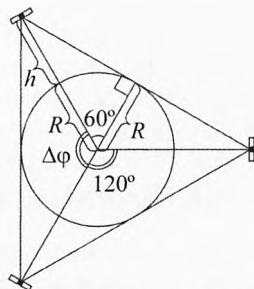


Рис. 14. Спутники вещания

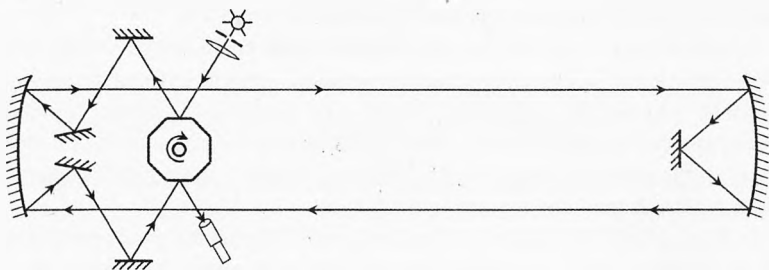


Рис. 15. Опыт Майкельсона

## Глава 2. Звуковые волны

*Отдавайте своей мечте хотя бы час  
Вашего времени, но каждый день. Еже-  
дневная работа – залог Вашего успеха!*

Дональд Трамп  
(президент США, миллиардер)

### § 6. Звуковые волны

Среди огромного разнообразия волн особое место в жизни человека занимают звуковые волны.

**Звук** – это упругие механические волны, вызывающие звуковые ощущения в органах слуха человека и животных.

Раздел физики, в котором изучаются звуковые явления, называется **акустикой** (от греч. *akustikos* – слуховой).

Для общения и передачи информации при помощи звука необходимо наличие как минимум трёх элементов: источник звука, упругая среда, через которую передаётся звук, и приёмник звука.

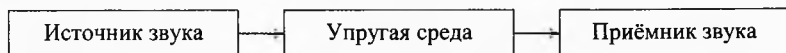


Рис. 1. Передача звука

Если нет источника звука, то в упругой среде не возникают звуковые волны. Если нет упругой среды, то источнику не в чем создавать «волнения». Звук не может распространяться в вакууме. Упругой средой может служить газ, жидкость или твердое тело. Если нет приёмника звука, то невозможно узнать, какими трелями заливаются соловей.

Однако звук – это не только объективная реальность – упругие волны. При восприятии звука существенную роль играет субъективный элемент: звуковые ощущения в органах слуха. То есть восприятие звука имеет и субъективную составляющую. Каждый человек не раз ощущал в себе звучание музыки, которой вокруг нет. Иногда, бывает, привяжется какой-нибудь мотив, и не знаешь, как от него отвязаться.

А как сочиняют музыку композиторы? Порой музыка приходит им неизвестно откуда, а их задача только успеть запомнить её и записать в нотах. Моцарт, например, порой писал большие произведения, не отрывая руки от нотной тетради, и потом ему даже не приходилось делать исправления.

Поскольку звук имеет и объективную, и субъективную стороны, то и характеристики звука подразделяют на объективные и субъективные.

## § 7. Объективные характеристики звука

К объективным характеристикам звука относятся: частота звука, интенсивность (сила) звука, звуковое давление, спектр звука.

**Диапазон звуковых частот.** Не всякая механическая волна вызывает ощущение звука. Если слабо натянуть струну и заставить её колебаться, то звука мы не услышим, хотя колебания распространяются в пространстве аналогично звуковым. Увеличив натяжение, заметим, что струна начинает звучать, когда частота колебаний достигнет 16 Гц и выше. При увеличении частоты колебаний звук будет переходить от басов через средние частоты к высоким. Максимальная частота звука, который может услышать «стандартное» ухо, составляет 20 000 Гц (или 20 кГц).

Итак, диапазон частот механических волн, которые человек может воспринимать в качестве звука, составляет от 16 Гц до 20 000 Гц.

В детстве человек воспринимает звук в более широком диапазоне. С возрастом он уменьшается до 10 кГц и меньше.

■ *Механические волны менее 16 Гц называются **инфразвуком**.*

Инфразвук в повседневной практике не используется. Инфразвуковые волны от некоторых вентиляторов вызывают усталость у людей. А колебания с частотой от 6 до 10 Гц заставляют вынужденно колебаться внутренние органы человека: сердце, почки и др., поскольку собственные частоты колебаний внутренних органов человека находятся в этом диапазоне. Это опасно для жизни, и люди, попавшие на такие излучения, стараются немедленно от них избавиться.

В начале XX в. американский физик-экспериментатор Роберт Вуд соорудил дополнительные трубы к органу для создания инфразвуковых волн сердечного диапазона для большего эмоционального воздействия на слушателей. На первой же репетиции публика с ужасом разбежалась, и проект пришлось закрыть. На этом эффекте в дальнейшем был создан инфразвуковой «свисток» для разгона демонстраций.

|| *Звук частотой от 20 кГц до 1 ГГц называются **ультразвуком**.  
Звук частотой более 1 ГГц называется **гиперзвуком**.*

Некоторые животные, например собаки, в отличие от людей способны воспринимать ультразвук. Они реагируют, например, на ультразвуковой свисток.

На использовании ультразвука основано действие карманного ультразвукового отпугивателя собак. Направив отпугиватель на агрессивную собаку, вы посылаете мощный ультразвуковой сигнал (как правило, с частотой 24,3 кГц) в сторону животного. При этом агрессивная собака либо будет держаться от вас на расстоянии, либо убежит.

Ультразвуковые волны широко используются в технике, медицине (УЗИ), мореплавании для измерения глубин и ориентирования под водой на подводных лодках.

Ультразвук плохо распространяется в воздухе, но хорошо в воде. Причём можно создавать узконаправленные пучки ультразвука в воде и осуществлять ультразвуковую локацию. На подводных лодках есть должность акустика.

Ультразвук обладает удивительными свойствами. С помощью ультразвука можно смешать несмешивающиеся при обычных условиях жидкости, например воду со ртутью. Ультразвук дробит капельки ртути до размеров молекул, и вода со ртутью перемешивается до однородной смеси. Причём эта смесь остается в таком состоянии надолго даже после выключения ультразвука.

Существуют миниатюрные стиральные машинки, которые «выбивают» грязь без моющего средства за счёт ультразвуковых волн.

Летучие мыши используют ультразвуковую эхолокацию при ориентировании в воздухе. Они могут в полной темноте летать по комнате, опоясанной вдоль и поперёк верёвками, не задевая их. Уши успешно заменяют им глаза. Частоты испускаемых ультразвуковых импульсов составляют от 25 до 50 кГц. Длительность каждого импульса около 0,015 с.

Диаграмма, изображенная на рис. 2, позволяет сравнить границы восприятия звука человеком и другими живыми существами.



Рис. 2. Границы восприятия звука живыми существами

**Интенсивность звука.** Вторая объективная характеристика звука – интенсивность, или сила звука (от лат. *intensio* – напряжение, усиление).

|| Интенсивность звука равна средней за период плотности потока энергии в звуковой волне.

**Интенсивность звука** – скалярная величина, характеризующая мощность, переносимую звуковой волной в направлении распространения. Интенсивность звука равна энергии, переносимой звуковой волной за единицу времени через единичную площадь поверхности, расположенной нормально к лучам, то есть перпендикулярно направлению распространения волны.

$$\bar{j} = \frac{\bar{W}}{S_{\perp} \cdot t}, \quad [I] = 1 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}.$$

Интенсивность самых слабых звуковых сигналов, слышимых человеком, составляет около  $10^{-13}$  Вт/м<sup>2</sup>. Интенсивность звука при разговоре составляет примерно  $10^{-6}$  Вт/м<sup>2</sup>. Двигатели самолета создают звуки интенсивностью  $10^{-2}$  Вт/м<sup>2</sup>, а удар грома – до 1 Вт/м<sup>2</sup>.

**Звуковое давление.** Третья объективная характеристика звука – звуковое давление. В воздухе распространяются только продольные волны. Они представляют собой последовательность сжатий и расширений воздуха в пространстве и времени. Сжатие и расширение воздуха сопровождаются увеличением и уменьшением давления воздуха  $p$  относительно атмосферного давления  $p_0$ .

**Звуковое давление** – переменная часть давления, возникающая в упругой среде при прохождении через неё звуковой волны:

$$p_{\text{зв}} = |p - p_0| \quad \text{или} \quad p_{\text{зв}} = |\Delta p|.$$

Мгновенное значение звукового давления в точке среды изменяется как со временем, так и при переходе к другим точкам среды, поэтому практический интерес представляет среднеквадратичное значение данной величины.

При негромком разговоре звуковое давление равно 0,1 Па. Громкому разговору соответствует звуковое давление в десятки паскалей. Но даже в этом случае звуковое давление на несколько порядков меньше атмосферного давления и составляет лишь десятые доли процента от атмосферного давления  $p_0 = 10^5$  Па.

Человеческое ухо очень чувствительный прибор. Оно способно воспринимать изменения давления до  $\Delta p = 10^{-5}$  Па, то есть до десятиллиардной доли от атмосферного давления. Это соответствует подводимой к ушным раковинам мощности  $10^{-16}$  Вт.

**Спектр звука.** Четвертая объективная характеристика звука – спектр звука.

Волна, создаваемая гармонически колеблющимся телом, называется тоном или **музыкальным тоном**.



Например, звучание камертона на частоте 440 Гц – музыкальный тон (ля первой октавы)\*.

Однако большинство звучащих тел излучают не гармонические колебания, а более сложные. Но во многих случаях этот сложный звук можно представить в виде конечного числа простых, гармонических колебаний.

**Звуком** называется именно такая волна, которую можно представить в виде конечного набора гармонических колебаний с различными амплитудами и частотами.

**Спектром сложного звука** называется совокупность гармонических звуков с определёнными амплитудами, на которые его можно разложить.

На рис. 3 представлены амплитудно-частотные спектры рояля и кларнета на основной частоте 100 Гц.

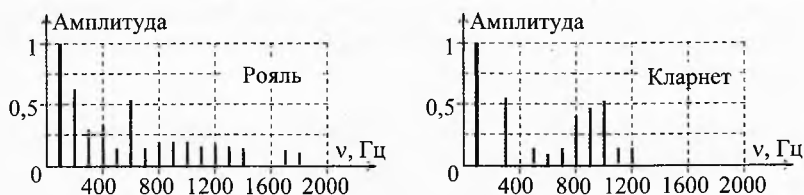


Рис. 3. Амплитудно-частотные спектры рояля и кларнета на частоте 100 Гц

Обратим внимание, что первая линия в спектре обоих инструментов на частоте 100 Гц имеет максимальную амплитуду. Это – **основной тон**. Частота сложного звука определяется по основному тону минимальной частоты, амплитуда которого всегда максимальна.

Тоны более высоких частот называются **обертонами**. Они кратны основному тону.

Например, при ударе молоточком по струне рояля основной тон получается для возбуждаемой стоячей волны, длина которой вдвое больше длины струны, при этом на всей длине струны укладывается половина длины стоячей волны (по краям струны – узлы, посередине – пучность):

$$l = \frac{\lambda_0}{2} \quad \text{или} \quad \lambda_0 = 2l.$$

\* То, что волны, излучаемые камертоном, гармонические, легко проверить на практике. Подключим к осциллографу микрофон. Расположим микрофон рядом с открытым концом деревянного ящика камертона. Ударим молоточком по камертону. Из ящика камертона будет выходить звуковая волна. Микрофон преобразует энергию этой звуковой волны в электрический сигнал. На осциллографе мы увидим синусоиду, амплитуда которой постепенно будет уменьшаться по мере затухания звука.

Но в этой же струне возбуждается стоячая волна и вдвое большей частоты, когда на длине струны укладывается длина волны:  $\lambda_1 = l$ , а также полторы длины волны:  $l = 1,5 \cdot \lambda_2$  или  $\lambda_2 = \frac{2}{3} \cdot l$  и т.д.

Каждая линия в спектре звука (основной тон и обертоны) носит название **гармоника**.

В нашем примере для звучания рояля заметны гармоника вплоть до 18-й, причём 15-я и 16-я практически отсутствуют.

## § 8. Субъективные характеристики звука

К субъективным характеристикам звука относятся: высота звука, громкость, тембр, форманты.

**Высота звука.** Высота звука является субъективным восприятием частоты звуковой волны.

|| Чем больше частота звука, тем он выше. И наоборот, чем меньше частота звука, тем он ниже.

**Громкость звука.**

|| **Громкость звука** – это субъективное восприятие интенсивности звука, зависящее от интегральной и спектральной чувствительности уха.

Подключим к генератору низкой частоты звуковые колонки высшего класса, которые дают практически одинаковый коэффициент воспроизведения на всём диапазоне частот от 16 до 20 000 Гц и начнем слушать звуки, воспроизводимые этой установкой, поддерживая одинаковую интенсивность звука на любых частотах.

Мы обнаружим, что на самых низких частотах около 20 Гц кажущаяся громкость звука – маленькая. Зато при этом хорошо видны колебания диффузора динамиков звуковых колонок.

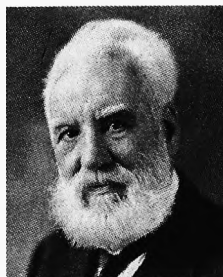
Увеличивая частоту колебаний, мы ощущаем, что высота звука возрастает и звучание становится все громче, хотя интенсивность звука не изменяется.

При достижении частоты  $3 \div 3,5$  кГц громкость возрастает многократно, возникает желание убежать из комнаты. Дело в том, что чувствительность уха сильно зависит от частоты звука (**спектральная чувствительность**). Например, чувствительность уха к звуку частотой 100 Гц приблизительно в 1000 раз (!) меньше, чем к звуку частотой 1 кГц.

При дальнейшем увеличении частоты громкость звука, излучаемого установкой со звуковым генератором, постепенно уменьшается до нуля при частоте 20 кГц.

Следует отметить, что чувствительность уха к звукам высокой частоты меняется с возрастом. В детстве мы слышим высокочастотные звуки лучше, чем в зрелом возрасте. Надо также сказать, что не все люди одного возраста слышат одинаково. Есть немало глухих с детства на одно или оба уха. Есть люди слегка глуховатые. Есть люди, обладающие абсолютным слухом. Общая (интегральная) чувствительность уха одного и того же человека зависит от его состояния и состояния окружающей среды, например шумового фона. Наш организм, стремясь выжить, организует чувствительность уха так, чтобы всегда слышать жизненно важные звуки. Например, мать может спокойно спать, когда за окном громяхают электрички, но она мгновенно просыпается, если начнет плакать её ребенок.

Из написанного выше ясно, что восприятие громкости звука субъективно. Но ведь хочется как-то объективно оценивать субъективное. В философии известен тезис, что всё объективное стремится субъективизироваться, а всё субъективное – объективизироваться.



Александр Грейам Белл (1847–1922)

**Уровень громкости звука  $L$  оценивается для некоего стандартного уха человека. Он определяется десятичным логарифмом отношения интенсивности  $j$  данного звука к интенсивности  $j_0$  звука, громкость которого принимается за ноль:**

$$L = \lg\left(\frac{j}{j_0}\right), \quad [L] = 1 \text{ Б.}$$

где  $j_0 = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$ .

Единица измерения громкости звука (бел) названа в честь одного из изобретателей телефона шотландца Александра Белла.

Если интенсивность звука равна  $j_0$ , то, согласно приведенной формуле, его громкость равна нулю:

$$L_0 = \lg\left(\frac{j_0}{j_0}\right) = \lg(1) = 0.$$

Минимальная интенсивность звука, которую может воспринимать стандартное ухо человека, равна  $j_{\text{мин}} = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$ . Громкость такого звука равна

$$L_{\text{мин}} = \lg(1) = 0 \text{ Б.}$$

Капли воды, падающие из крана в раковину, создают интенсивность около  $10^{-10} \text{ Вт/м}^2$ . Значит, громкость звука от падения капель равна

$$L_{\text{капель}} = \lg(100) = 2 \text{ Б.}$$

На практике часто пользуются в десять раз меньшей единицей громкости: *децибел* (дБ):

$$1 \text{ Б} = 10 \text{ дБ}.$$

Весь диапазон громкости звуковых волн, воспринимаемый ухом в качестве звука, находится в интервале от 0 до 13 Б или от 0 до 130 дБ.

Звук громче 130 дБ вызывает ощущение боли в барабанных перепонках. Громкость звука 130 дБ соответствует интенсивности  $10 \text{ Вт/м}^2$ . Так звук слышен от близко разразившегося грома. Звук громкостью 120 децибел мы слышим на расстоянии 10 м от винтомоторного самолета, 80 децибел – от проезжающего мимо автомобиля. При уровнях звука свыше 160 дБ возможен разрыв барабанных перепонки и лёгких, при громкости больше 200 дБ наступает смерть.

Отметим, что каждые 10 децибел (или 1 бел) уровня громкости соответствуют увеличению интенсивности звука в 10 раз:

$$j_1 = j_0 \cdot 10^{L_1}; j_2 = j_0 \cdot 10^{L_2}; \Rightarrow \frac{j_1}{j_2} = \frac{j_0 \cdot 10^{L_1}}{j_0 \cdot 10^{L_2}} \text{ или } \boxed{\frac{j_1}{j_2} = 10^{L_1 - L_2}}.$$

Так, громкость шума на дискотеке составляет 100÷120 децибел. Интенсивность звука при этом в тысячи раз больше, чем при громком разговоре между двумя людьми (70÷80 децибел).

**Таблица 1. Звуковое давление и уровень громкости звука в различных случаях**

Амплитуда звукового давления, Па	Громкость звука, Дб	Примерные условия
$2 \cdot 10^3$	160	Механическое повреждение барабанной перепонки
$2 \cdot 10^4$	140	Реактивный самолет на расстоянии 30 м (болевое ощущение)
	120	Дискотека в закрытом помещении
2	100	Поезд метро
	75	Шум в салоне отечественного автомобиля, движущегося со скоростью 100 км/ч
	70	Интенсивное уличное движение
$2 \cdot 10^{-2}$	60	Нормальный разговор
$2 \cdot 10^{-4}$	20	Очень тихий шепот
$2 \cdot 10^{-5}$	0	Порог слышимости

Следует отметить, что громкие звуки и шумы очень вредны для здоровья. Поэтому органами здравоохранения установлены санитарные нормы для уровня допустимого шума. Согласно этим нормам, например, для жилых помещений допустимый постоянный уровень звука в дневное время – 40 дБ, в ночное – до 30 дБ, а для офисных помещений класса А (по европейским нормам) – 55 дБ, что соответствует громкости обычного разговора.

У певцов уровень интенсивности звука составляет 30–110 дБ и даже 130 дБ на расстоянии 1 м от поющего! Подобные интенсивности звука нельзя достичь ни одним музыкальным инструментом.

Люди, проводящие много времени в шумных компаниях, рискуют заболеть шумовой болезнью, симптомами которой являются нервная возбудимость, быстрая утомляемость, плохой сон, тугоухость, гипертония и т.п.

**Тембр звука.** Тембр звука (от франц. *timbre* – окраска) – это качественная оценка звука, издаваемого музыкальными инструментами или голосовым аппаратом людей (животных).

Тембр характеризует определённый оттенок, «окраску» звучания, по которому различают на слух звуки одинаковой высоты тона (одинаковой основной частоты колебаний), издаваемые разными источниками звука.

Тембр – это субъективное восприятие спектра звука. Тембр зависит от числа и соотношения амплитуд обертонов, входящих в состав звука. И хотя сдвиги по времени отдельных обертонов могут сильно менять форму результирующего колебания, они не влияют на восприятие. Два звука воспринимаются одинаково, если у них одинаковых спектр, то есть одинаковый набор частот, и одинаковы амплитуды соответствующих обертонов. Даже если осциллограммы двух звуков различны, но их спектрограммы одинаковы, то ухо воспринимает их как один и тот же звук.

Спектр звука, а значит, и его тембр зависят от свойств колебательной системы музыкального инструмента или структуры звукового аппарата. На тембр также влияют материал звучащего тела, среда, в которой возникает и распространяется звук, и т.п.

Как мы на слух отличаем звуки рояля и кларнета?

Обратим ещё раз внимание на спектрограммы звуков частотой 100 Гц рояля и кларнета (рис. 3). Несмотря на то что высоты и амплитуды основных тонов одинаковы, состав и амплитуды обертонов не совпадают. У рояля кроме основного тона заметны 15 обертонов, причём 15-я и 16-я гармоники практически отсутствуют. А у кларнета видны 9 обертонов, причём отсутствуют 2-я и 4-я гармоники.

Влияние обертонов на восприятие звука огромно. Мы с большим удовольствием слушаем певцов с богатым тембром, то есть с большим числом обертонов в их пении. Известно сильное влияние пения теноров на женщин.

## § 9. Акустический резонанс. Анализ и синтез звука

**Акустический резонанс.** Поставим рядом два одинаковых камертона, расположив друг к другу отверстия ящиков, на которых они укреплены (рис. 4).

Ящик камертона называют резонатором или резонансным ящиком. Размеры ящика подобраны таким образом, что столб воздуха в ящике входит в

резонанс с колебаниями вилки камертона. За счёт этого звук усиливается, и камертон звучит громко, хотя и не так долго, как без ящика.

Ударим по одному из камертонов и вскоре приглушим его пальцем. Мы услышим звучание второго камертона.

Колебания первого камертона распространяются через воздух в виде звуковых волн, которые, в свою очередь, заставляют совершать вынужденные колебания второй камертон. Поскольку собственная частота обоих камертонов одинакова, то второй камертон входит в резонанс с первым камертоном.

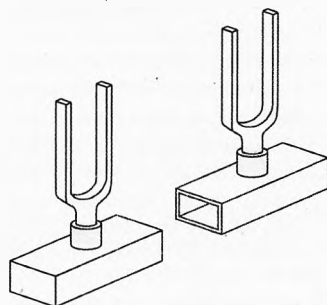


Рис. 4. Акустический резонанс

Но если ко второму камертону прицепить дополнительный груз или взять камертон с другой собственной частотой, то резонанса не будет, то есть такой камертон не будет откликаться на звучание первого.

**Анализ звука.** Акустический резонанс используется для анализа звука. Ещё немецкий естествоиспытатель Гельмгольц Герман Людвиг Фердинанд сделал систему резонаторов, позволяющих определять частоты, на которых звучит какой либо источник звука.

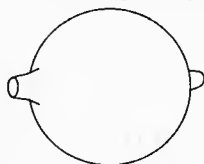


Рис. 5. Анализатор Гельмгольца

Анализатор Гельмгольца представляет собой полые шары разного размера, снабжённые отростком, вставляющимся в ухо и имеющим отверстие с обратной стороны (рис. 5). Всякий раз, когда в анализируемом звуке содержится тон с частотой резонатора, то резонатор

начинает звучать в этом тоне. Шары с другой собственной частотой не резонируют, и поэтому звук от них не слышен.

Анализ звука таким методом довольно кропотлив и не очень точен. Поэтому в настоящее время он вытеснен более точными и быстрыми электроакустическими методами. В таких приборах акустические колебания сначала преобразуются в электрические с сохранением той же формы сигнала, а значит, имеющие тот же спектр. А затем эти электрические колебания анализируются электрическими методами.

**Форманты** (от лат. *formans, formantis* — образующий). По тембру мы можем отличить голос одного человека (или инструмента) от другого. Но чем отличаются звуки, когда один человек поет на одной ноте различные гласные: а, и, о, у, э и т.д.? То есть чем различаются в этих случаях спектры звуков, издаваемые при разных положениях губ и языка и изменениях положений формы полостей рта и горла? Очевидно, что в спектре каждого гласного должны быть какие-то особенности кроме тех, которые создают тембр голоса данного человека. Причём эти



Герман Людвиг Фердинанд Гельмгольц (1821–1894)

особенности для конкретной гласной должны быть однотипными независимо от высоты звука.

С помощью гармонического анализа электроакустическими методами установлено, что гласные звуки характеризуются наличием в их спектрах парных областей обертонов с большой амплитудой. Причём эти области лежат для каждой гласной всегда на одних и тех же частотах, независимо от частоты пропетого звука. Эти области сильных обертонов называются формантами (образующими данную гласную). На рис. 6 представлены форманты (в форме холмиков) гласных звуков на шкале частот.

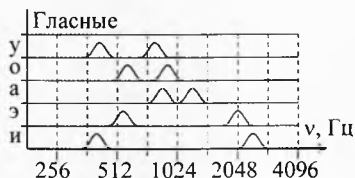


Рис. 6. Форманты

**Форманта** — это акустическая характеристика звуков речи (прежде всего гласных), представляющая собой область концентрации энергии на спектрограмме звука, позволяющая идентифицировать (определить) конкретный гласный звук, независимо от его высоты.

**Синтез звука.** Сложный звук можно получить естественным путем. Например, послушать играющий симфонический оркестр. Но можно во время игры оркестра с помощью микрофонов записать информацию в аналоговом или цифровом формате, а затем воспроизвести игру оркестра с помощью магнитофона, компьютера или любого другого музыкального плеера. В этом случае звуковые колебания воздуха создаются не инструментами оркестра, а колебаниями диффузоров звуковых колонок. Но при этом создается впечатление, что играет оркестр, хотя на самом деле он отсутствует.

Если искусственным путем воспроизвести спектры гласных и согласных звуков или спектры звучания музыкальных инструментов, то наше ухо получит впечатление соответствующих звуков. Этот факт широко используется в электроакустических синтезаторах. В них очень просто менять спектр звука, то есть менять его тембр. Переключение регистров позволяет воспроизводить звуки, похожие на звуки рояля, скрипки, или даже создавать новые музыкальные инструменты. Подключив синтезатор к компьютеру, можно обучаться игре на рояле, не имея этого громоздкого инструмента в квартире.

## § 10. Шумы. Консонанс. Диссонанс

Музыкальный звук (ноту) мы слышим, когда спектр звука линейчатый (есть основной тон с максимальной амплитудой и некоторое количество обертонов). Такие звуки издают любые струнные или духовые инструменты.

Если одновременно ударить по нескольким клавишам рояля, то сразу зазвучит несколько нот. Ощущение музыкального звука сохранится. Спектр звука будет по-прежнему линейчатым, только теперь звучат несколько основных тонов и значительно больше обертонов, чем при ударе по одной клавише. Но отчетливо проявится различие консонирующих и диссонирующих нот.

**Консонансом** (франц. *consonance* — от лат. *consonantia* — созвучие) называется приятное для слуха одновременное звучание разных тонов.

Консонанс – один из важнейших элементов гармонии. К консонансу относят приму, октаву, квинту, кварту, большие и малые терции и сексты, а также аккорды, составленные из этих интервалов без участия диссонирующих.

**Диссонанс** (франц. *dissonance* – от лат. *dissono* – нестройно звуча) – это неслитное, неприятное на слух одновременное звучание различных тонов.

К диссонансу относят большие и малые секунды, септимы, увеличенные или уменьшенные интервалы, а также аккорды, включающие хотя бы один из таких интервалов.

Оказывается, что консонируют те ноты, частоты которых находятся в отношениях небольших целых чисел. Например, консонанс получается при отношении частот основных тонов 2:3 (это созвучие называется квинтой), при отношении 3:4 (кварта), при отношении 4:5 (большая терция) и т.д. Если же частоты основных тонов относятся как большие числа, например 19:24, то получается диссонанс – звук музыкальный, но неприятный на слух.

Если же мы положим на клавиатуру фортепиано линейку и ударим по ней, то зазвучит сразу много струн и звук получится шумоподобный. Неприятный звук также получается, когда перед концертом все музыканты симфонического оркестра настраивают свои инструменты.

Для шумов характерна сильная непериодичность формы колебаний, широкий спектр колебаний, очень неправильные, сложные по форме колебания (шипение, скрип) либо отдельные выбросы (стуки, щелчки, например, при перескоках считывающей головки на заезженной виниловой пластинке или на поцарапанном CD). С этой точки зрения к шумам следует отнести и звуки, соответствующие согласным (шипящие, губные и т.п.). На рис. 7а показан спектр звука, точнее, шума согласной «с». На рис. 7б спектр шума пылесоса.

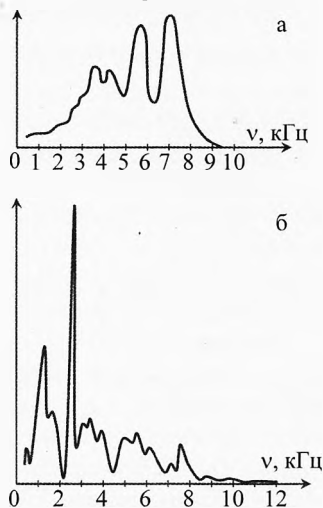


Рис. 7. Спектр согласной «с» и шум пылесоса

Во всех случаях спектр шумовых колебаний состоит из огромного числа гармонических колебаний с различными амплитудами.

От звука к шуму мы приближались по мере того, как увеличивали количество одновременно ударяемых клавиш рояля.

Таким образом, у гармонического колебания (например, камертона) спектр состоит из одной частоты. Это – чистый музыкальный звук, но сухой и неинтересный для слуха.

У музыкальных инструментов спектр состоит из дискретного набора частот – основного тона и кратных ему обертонов.

У консонирующих созвучий спектр состоит из спектров нескольких звуков, причём их основные частоты соотносятся, как небольшие числа (в пределах десятка).



У диссонирующих созвучий частоты основных тонов уже не находятся в таких простых отношениях.

Чем больше в спектре разных частот, тем ближе мы подходим к шуму. Истинный шум имеет непрерывный спектр.

Итак, мы получили две крайности звуковых волн: первая – это гармоническое колебание, тон или музыкальный звук с одной частотой, а вторая – истинный 100% шум, спектр которого непрерывен.

**Вопрос.** Имеются два ударных инструмента: барабан и литавры. Почему барабан называется шумовым инструментом, а литавры – музыкальным?

## § 11. Звуковые явления

**Пение.** Пение людей и птиц можно отнести к самым замечательным звуковым явлениям. Голоса людей сильно отличаются по громкости звучания, диапазону воспроизводимых звуков и тембру.

Диапазон мужских голосов по высоте звука значительно ниже, чем женских. Самый низкий мужской голос – *бас*. За ним следует более высокий голос – *баритон*. Самый высокий голос у *тенора*. Аналогично разделяются женские голоса на *альт* (или *контральто*), *меццо-сопрано* и *сопрано*. В свою очередь, эти виды голосов разделяются на определённые подвиды, например, колоратурное сопрано.

Диапазон частот самого низкого мужского голоса (баса) составляет 60–350 Гц. Абсолютный «нижний» рекорд мужского баса (фа контроктавы или 44 Гц) поставлен в XVIII веке певцом Каспаром Феспером. Частота колебаний звука наивысшей ноты, которую могут брать мужчины, 500 Гц. Самая высокая нота (ре четвертой октавы, или 2300 Гц) взята французской певицей Мадо Робен в середине XX века.

Огромное удовольствие слушать Федора Ивановича Шаляпина, Энрико Карузо или Лучано Паваротти. Но ещё интереснее слушать несколько басов или теноров, выступающих вместе. Вспомните совместные выступления Хосе Каррераса, Плачидо Доминго и Лучано Паваротти. Незабываемо впечатление у тех, кто смотрел и слушал живой концерт в исполнении хора Михаила Турецкого, когда одновременно выступают 10 человек во всех диапазонах мужских голосов. А какое впечатление производят выступления больших хоров!

Голос человека, особенно в пении, – это одно из самых удивительных явлений природы. Воздействие певца в несколько раз сильнее, чем оркестра, с которым он поет.

**Гром.** Гром – одно из самых впечатляющих звуковых явлений в атмосфере, сопровождающее разряд молнии.

Молния представляет собой электрический разряд между облаками или между облаками и землей. Во время разряда в канале молнии воздух очень

быстро нагревается и расширяется. Причём за один удар молнии по разрядному каналу проходит несколько электрических разрядов подряд. В результате происходят интенсивные колебания воздуха.

*Раскаты грома* объясняются многократными отражениями звука от облаков, гор и других препятствий. А также тем, что молния имеет большую длину и звук от разных её участков доходит до уха наблюдателя не одновременно.

Люди почему-то боятся грома, хотя ничего опасного в громе нет кроме удара по барабанным перепонкам. А вот удар молнии очень опасен, вплоть до летального исхода. Поэтому на зданиях часто устанавливают молниеотвод, служащий для защиты от удара молнии (в быту также употребляется слово «громоотвод»).

Нельзя не отметить величественность явления молнии и грома. Как писал Ф. Тютчев: «Люблю грозу в начале мая, когда весенний, первый гром, как бы резвяся и играя, грохочет в небе голубом».

**Эхо.** Слово «эхо» произошло от имени нимфы в греческой мифологии; по одному из мифов, она потеряла способность говорить и могла лишь повторять окончания чужих слов в наказание за болтливость; по другому – от безответной любви к Нарциссу так иссохла, что стала невидимой и сохранила лишь голос.

*Эхо – это акустическая волна, отражённая от какого-либо препятствия и принятая наблюдателем (слушателем).*

Звуковое эхо воспринимается ухом отдельно от первичного сигнала (короткого звукового импульса) лишь в тех случаях, когда оно запаздывает не менее чем на 0,05–0,06 с.

Звуковое эхо используется в гидролокации и ультразвуковой дефектоскопии.

### **Реверберация.**

*Реверберация (от лат. reverberatio – отражение) – это послезвучание, сохраняющееся после выключения источника звука и обусловленное неодновременным приходом в данную точку отражённых или рассеянных звуковых волн.*

Реверберация оказывает значительное влияние на слышимость речи и музыки в помещении.

*Время, в течение которого интенсивность звука уменьшается в миллион раз (или на 60 дБ), называется временем реверберации.*

Большая длительность времени реверберации приводит к неприятной гулкости помещения, а недостаточная – к резко отрывистому звучанию, лишённому музыкальной «сочности».

Искусственно созданная реверберация в определённых пределах способствует улучшению звучания, создавая ощущение хорошего «резонанса» в помещении.

Для уменьшения реверберации в помещениях используют мягкую портьерную бархатную ткань или обивку, ковры.

В некоторых моделях телевизоров и звуковых усилителей есть функция «гиперзвук», при использовании которой звук воспринимается более насыщенным. В этом случае применяется искусственная реверберация.

**О гармонии и ладе в музыке и пении.** Гармония (от лат. *harmonia* – связь, созвучие, соразмерность) – это соразмерность частей, слияние различных компонентов объекта в единое органичное целое.

**Гармония в музыке** – это выразительные средства музыки, связанные с объединением тонов созвучия в условиях музыкального лада.

**Музыкальный лад** – система взаимосвязей музыкальных звуков, определяемая зависимостью неустойчивых звуков от устойчивых опорных звуков.

Китайцы вдали веков установили с помощью акустических измерений систему тонов, которой мы пользуемся до сих пор. Они закрепили в сознании гамму из пятитонального ряда квинт, считая ноту «до» отправной точкой. Многочисленные мелодии образовались из этих звуков этой пятитонной (пентатонной) лишенной полутонов гаммы и даже после того, как была изобретена система из семи тонов. Народные песни Шотландии и многих других народов, а также в некоторой степени мелодии григорианского хора, культовые напевы католической церкви базируются на пятитонной гамме.

Китайцы же установили и семитонную диатоническую гамму с двумя полутонами около 1500 лет до нашей эры. В европейской музыке преимущественно распространены диатонические лады с гаммой из семи ступеней, в особенности мажор и минор.

Важнейшее значение в гармонии имеют *аккорды*. В смене аккордов проявляются их ладовые гармонические функции, а также закономерности голосоведения. Гармония во многом зависит от мелодии и в то же время обогащает и углубляет её выразительность.



## Упражнения

**1** Наблюдатель находится на расстоянии  $l = 1600$  м от линии, над которой пролетает самолет перед посадкой. В момент максимального сближения самолета с наблюдателем угол между горизонталью и направлением на самолет составил  $\alpha = 37^\circ$ . Спустя время  $t = 6$  с направление на самолет изменилось на угловое рас-

стояние  $\varphi = 14^\circ$ . Найти скорость  $v$  самолета. Считать движение самолета на данном участке практически горизонтальным.

**2** Самолет летит со скоростью  $v = 300$  км/ч над наблюдателем на высоте  $h = 990$  м. Определить на какое расстояние звуковое изображение самолета отстанет от визуального. Скорость звука  $v_{\text{зв}} = 330$  м/с.

**3** Сверхзвуковой самолет летит на высоте  $h = 4$  км со скоростью  $v = 2500$  км/ч. Какой угол составляет фронт его звуковой волны с фюзеляжем самолета? Через какой промежуток времени звук от самолета достигнет наблюдателя на поверхности земли после того, как самолет пролетит над ним.

**4** Самые низкие и высокие звуки воспринимаемые человеком, равны  $\nu_1 = 16$  Гц и  $\nu_2 = 20\,000$  Гц. Чему равны соответствующие им длины волн?

**5** Только молодые люди (причём не все) могут воспринимать весь диапазон звуковых волн (от 16 Гц до 20 кГц). Многие мужчины среднего возраста воспринимают звуки лишь частотой до 12 кГц. После 50 лет многие мужчины и женщины утрачивают способность воспринимать верхнюю область звукового спектра из-за уменьшения эластичности барабанных перепонки. А каков Ваш диапазон восприятия звука? Проверьте с помощью звукового генератора низкой частоты, подключённого к звуковой колонке хорошего качества в школьном физическом кабинете.

**6** Уровень громкости звука реактивного самолета на расстоянии  $r_1 = 30$  м от него равен  $L_1 = 140$  дБ. Каков уровень громкости от самолета на расстоянии  $r_2 = 300$  м? Отражением от земли пренебречь.

**7** Звуковая волна с уровнем громкости  $L = 75$  дБ падает на барабанную перепонку, площадь поверхности которой  $S = 0,5$  см<sup>2</sup>. Какую энергию поглотит барабанная перепонка за  $\tau = 1$  с.

### Решения, указания и ответы для самоконтроля

**1** За время  $t$  самолет пролетел расстояние  $S = v \cdot t$ . Как видно из рис. 8 для двух прямоугольных треугольников:  $S = L \cdot \operatorname{tg} \varphi$ ,  $l = L \cdot \cos \alpha$ . Значит,

$$v = \frac{S}{t} = \frac{L \cdot \operatorname{tg} \varphi}{t} = \frac{l \cdot \operatorname{tg} \varphi}{t \cdot \cos \alpha} = 83 \text{ м/с} = 300 \text{ км/ч.}$$

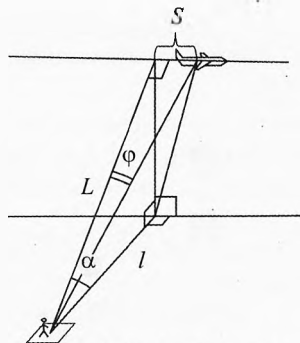


Рис. 8. Наблюдения за самолётом

**2** Прежде чем звук от самолета достигнет наблюдателя, ему необходимо преодолеть расстояние примерно равное  $h$ , для этого потребуется время  $\tau = h/v_{\text{зв}} = 3$  с. За это время самолёт и его визуальное изображение улетят на расстояние  $S = v \cdot \tau = 250$  м.

**3** От летящего самолета в каждый момент времени расходятся звуковые сферические волны. Огибающая этих волн даёт положение фронта волны (рис. 9). Поскольку сверхзвуковой самолет летит быстрее звука, значит, фронт волны будет представлять собой клин, расширяющийся позади самолета.

Угол  $\alpha$  между фюзеляжем (корпусом) самолета и фронтом волны найдём из треугольника  $ACD$ :

$$AC = v \cdot t_1, \quad AD = v_{\text{зв}} \cdot t_1 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{v_{\text{зв}}}{v}.$$

$$\sin \alpha = \frac{330 \text{ м/с}}{2500 \text{ км/ч}} \approx \frac{330 \text{ м/с}}{694 \text{ м/с}} \approx 0,4752, \quad \alpha \approx 28^\circ.$$

Быстрее всего наблюдателя на земле достигнет звуковая волна от самолета, которая была излучена в точке  $A$  (как видно из рисунка сферическая волна, испущенная из точки  $B$ , к этому моменту ещё не достигла точки  $D$ ). Учитывая, что  $AD \cdot \cos \alpha = h$ , найдём время  $t_1$ , за которое звук долетит от точки  $A$  до наблюдателя в точке  $D$ :

$$(v_{\text{зв}} \cdot t_1) \cdot \cos \alpha = h \Rightarrow t_1 = \frac{h}{v_{\text{зв}} \cdot \cos \alpha} = 13,8 \text{ с}.$$

Самолет от точки  $A$  до точки  $B$  долетит за время  $t_2$ :

$$t_2 = \frac{AB}{v} = \frac{h \operatorname{tg} \alpha}{v} = \frac{4000 \text{ м} \cdot \operatorname{tg} 28^\circ}{694 \text{ м/с}} = 3,1 \text{ с}.$$

Итак, от момента, когда самолет был в точке  $B$  ровно над наблюдателем, до того, как наблюдатель услышит первые звуки, пройдет время  $\Delta t$ :

$$\Delta t = t_1 - t_2 = 10,7 \text{ с}.$$

Для сравнения убедимся, что  $\Delta t$  меньше времени  $t_3$ , за которое звук дойдет от точки  $B$  до наблюдателя:

$$t_3 = \frac{BD}{v_{\text{зв}}} = \frac{h}{v_{\text{зв}}} = 12,1 \text{ с}.$$

**4**  $\lambda = \frac{v_{\text{зв}}}{\nu}, \quad v_{\text{зв}} = 330 \text{ м/с}, \quad \lambda_1 = 20,6 \text{ м}, \quad \lambda_2 = 16,5 \text{ мм}.$

**6**  $L_1 = \lg \left( \frac{j_1}{j_0} \right), \quad L_2 = \lg \left( \frac{j_2}{j_0} \right), \quad \frac{j_1}{j_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \Rightarrow L_1 - L_2 = \lg \left( \frac{j_1}{j_2} \right),$

$$L_2 = L_1 - 2 \cdot \lg \left( \frac{r_2}{r_1} \right) = 140 \text{ дБ} - 2 \cdot \lg(10) \text{ Б} = 140 \text{ дБ} - 2 \text{ Б} = 120 \text{ дБ}.$$

**7**  $L = \lg \left( \frac{j}{j_0} \right), \quad j = \frac{W}{S \tau}, \quad j_0 = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2; \Rightarrow W = S \tau \cdot j_0 \cdot 10^L = 1,6 \text{ нДж}.$

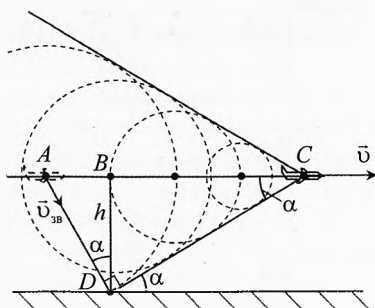


Рис. 9. Сверхзвуковой самолет

# Глава 3. Общие свойства волн

*Не позволяйте себе расстраиваться из-за пустяков. Помните, что жизнь слишком коротка, чтобы растрчивать её на пустяки.*

Дейл Карнеги (писатель, психолог)

## § 12. Поглощение и рассеяние волн

Все механические и электромагнитные волны имеют ряд общих свойств, так как любые волны представляют собой процесс распространения колебаний в пространстве.

К общим свойствам волн относятся: поглощение волн, рассеяние, отражение, преломление, дисперсия, интерференция, дифракция, поляризация (для поперечных волн).

**Поглощение волн.** Любые волны поглощаются средой, в которой они распространяются.

**Поглощение волн** – это явление преобразования энергии волн в другие виды энергии, как правило, во внутреннюю энергию среды, в которой распространяются волны.

В частности, поглощение звука обусловлено теплопроводностью, внутренним трением (вязкостью) и некоторыми релаксационными процессами, возникающими в среде при изменении давления и температуры в звуковой волне.

Амплитуда  $X_m$  и интенсивность  $I$  плоской волны, распространяющейся в однородной среде вдоль оси  $OY$ , уменьшаются вдоль этой оси с расстоянием по экспоненциальному закону (**закон Бугера–Ламберта–Бера**) (рис. 1):

$$X_m = X_{m0} \cdot e^{-\alpha \cdot y} \quad \text{и} \quad I = I_0 \cdot e^{-2\alpha \cdot y}$$

где  $X_{m0}$  и  $I_0$  – амплитуда и интенсивность волны в точке  $y = 0$ ,  $\alpha$  – линейный коэффициент поглощения звука, зависящий от свойств среды и частоты звука.

Поглощение звука используется для изучения внутренней структуры вещества, а также в архитектурной акустике.

Поглощение электромагнитных волн, в частности света, происходит вследствие преобразования энергии волны во внутреннюю энергию вещества или энергию вторичного излучения, имеющего другой спектральный состав

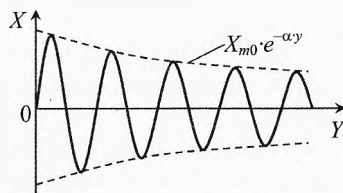


Рис. 1. Затухание волны

и иные направления распространения излучения (фотолюминесценция). Поглощение света зависит от химической природы и агрегатного состояния вещества. Избирательным (селективным) поглощением света объясняется окраска растворов красителей и минералов.

Поглощение света используется для изучения строения вещества, химического анализа веществ (абсорбционный спектральный анализ).

**Рассеяние волн.** Рассеяние волн наблюдается при распространении волны в среде с беспорядочно распределёнными неоднородностями этой среды, а также находящимися в этой среде инородными рассеивающими объектами.

***Рассеяние** состоит в образовании вторичных волн, которые распространяются по всевозможным направлениям.*

Рассеяние волн приводит к их ослаблению по мере распространения в среде. Любые волны рассеиваются средой, в которой они распространяются.

Рассеяние звука происходит на неоднородностях плотности и упругости среды. Рассеяние звука наблюдается на поверхности океана, неровном и неоднородном его дне, на пересечённой местности, на искусственных периодических структурах и неоднородных поглощающих поверхностях, применяемых для улучшения акустики больших помещений, на воздушных пузырьках в жидкости, на твёрдых взвешенных частицах в жидкости или газах (мутная или пыльная среда), на рыбах и макропланктонах в океане, каплях дождя в воздухе, точечных дефектах в кристаллах и т.п.

Поскольку при рассеянии звука часть акустической энергии уходит по направлениям, отличным от исходного направления распространения звука, то интенсивность первичной волны уменьшается. И чем больше толщина среды, пройденная волной, тем большая доля энергии волны рассеется.

***Рассеяние света** – это преобразование энергии света, сопровождающееся изменением направления его распространения и проявляющееся как несобственное свечение вещества.*

Несобственное свечение вещества обусловлено вынужденными колебаниями электронов в атомах рассеивающей среды под действием падающего света.

Рассеяние света происходит при распространении света в оптически неоднородной среде или в среде с инородными малыми частицами (в мутной среде).

Явление рассеяния света используют для изучения строения вещества, измерения мутности сред (например, питьевой воды), в астрофизических исследованиях, для контроля технологических процессов и т.п.

**Наблюдение рассеяния и поглощения света.** Наполним аквариум чистой водой. Пропустим пучок света от осветителя через аквариум в затем-

нённом помещении. Можно как вариант пропустить через аквариум свет от лазерной указки (рис. 2).

Мы заметим в аквариуме пучки света от осветителя и от лазера. Почему мы их видим, ведь светили не в нашу сторону? Мы видим пучки света сбоку благодаря рассеянному свету. То есть наблюдаем рассеяние света.

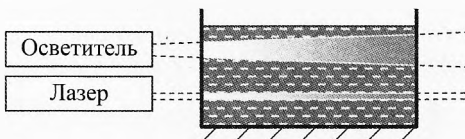


Рис. 2. Рассеяние и поглощение света

Мы также можем заметить, что в точке входа света в аквариум пучок в рассеянном свете кажется ярче, чем около выхода из аквариума. Почему? Во-первых, часть света рассеялась по дороге, а во-вторых, часть света поглотилась. Поэтому к дальней стенке пучок пришел ослабленным. А интенсивность видимого нами рассеянного света пропорциональна интенсивности основного пучка света, проходящего через данное сечение.

Теперь опустим на мгновение в аквариум тряпку, которой стираем мел с доски. Частички мела создадут в аквариуме мутную среду. Теперь нашим пучкам станет значительно труднее пройти сквозь аквариум, и до задней стенки пучки дойдут намного более ослабленными, чем через чистую воду.

**Вопрос 1.** Почему днём небо голубое?

✓ **Ответ.** Днём солнце стоит относительно высоко над горизонтом. Свет, проходя через атмосферу, частично поглощается, частично рассеивается, но большая часть света (около 80%) доходит до поверхности Земли. Днём небо голубое, потому что наиболее сильно в воздухе рассеивается именно голубая и фиолетовая часть спектра, и мы видим небо в голубом рассеянном свете.

**Вопрос 2.** Почему на заре небо багровое (красное)?

✓ **Ответ.** Заря – это совокупность красочных световых явлений в атмосфере, сопровождающих восход и заход Солнца. Когда Солнце склоняется к горизонту, лучи света скользят вдоль поверхности Земли и проходят в атмосфере значительно большее расстояние, чем обычно (рис. 3). Голубые и фиолетовые лучи ослабляются благодаря рассеянию и поглощению света, оставшиеся же лучи, а заодно и освещаемая ими атмосфера приобретают желтоватую и красноватую окраску. Интенсивность красок зари зависит от содержания в воздухе пыли и влаги; в более чистом воздухе зори бледные, а в запыленном и влажном – больше интенсивных красных тонов.

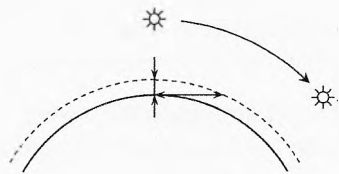


Рис. 3. Заря



## § 13. Отражение волн

Люди ежедневно видят своё отражение в зеркале, наблюдают отражение солнечного и искусственного света от окружающих предметов, слышат отражение звуковых волн в виде эха или ревербераций.

**Отражение волны** – это явление, возникающее при падении волны на границу раздела двух сред и состоящее в образовании волны, распространяющейся от поверхности раздела сред в ту же среду, из которой приходит падающая волна.

Пусть  $AB$  – граница двух сред (рис. 4). Опустим нормаль (перпендикуляр)  $ON$  к границе раздела двух сред в точке падения  $O$  луча  $CO$ .

**Углом падения**  $\alpha$  называется угол между падающим лучом  $CO$  и нормалью  $ON$  к границе раздела двух сред.

**Углом отражения**  $\gamma$  называется угол между отражённым лучом  $OD$  и нормалью  $ON$ .

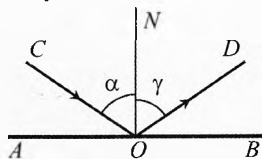


Рис. 4. Отражение луча

Различают три вида отражения: зеркальное, диффузное и смешанное.

**Зеркальное отражение.** На гладкой поверхности, для которой размер неровностей  $h$  во много раз меньше длины волны  $\lambda$ , то есть  $h \ll \lambda$ , отражение зеркальное. В этом случае пучок волн отражается в виде пучка волн (рис. 5).

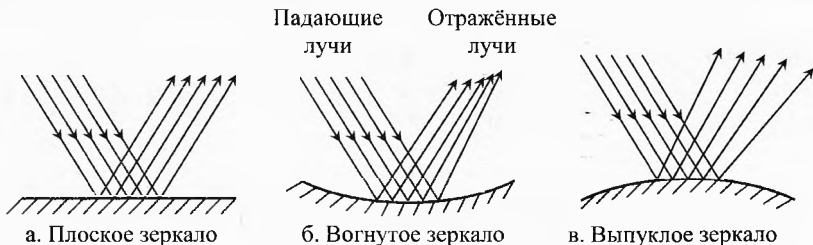


Рис. 5. Зеркальное отражение

Для зеркального отражения можно сформулировать **законы отражения** (эти законы были известны ещё древним египтянам).

Любые механические и электромагнитные волны отражаются на границе раздела двух сред так, что:

луч падающий, луч отражённый и нормаль к границе раздела сред, поставленная в точке падения, лежат в одной плоскости;

при любых углах падения угол отражения лучей равен углу их падения:

$$\alpha = \gamma$$

**Диффузное отражение.** Когда размеры неровностей примерно равны длине волны ( $h \approx \lambda$ ) или превышают её (шероховатая или матовая поверхность), то отражение диффузное. В этом случае пучок волн (например, света), падающий на поверхность, отражается по всевозможным направлениям (рис. 6).

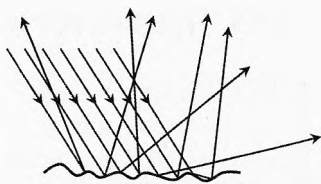


Рис. 6. Диффузное отражение

Направим параллельный пучок света осветителя на стену. Свет отразится так, что из любой точки комнаты можно увидеть светящееся пятно. Значит, свет отразился по всем направлениям. Шероховатый участок стены можно разбить на множество маленьких практически плоских участков. От каждого из них свет отражается зеркально. Но поскольку относительно нормали к стене эти участки ориентированы под разными углами, то для них будут самые разные углы падения, а значит, и различные углы отражения. Поэтому пучок света на шероховатой стене мы видим отовсюду.

Если повесить на стену зеркало на светящееся пятно, то для многих наблюдателей в классе оно исчезнет. Вернее, мы обнаружим его на другой стене или потолке в соответствии с законами зеркального отражения.

**Смешанное отражение.** Теперь направим пучок света на зеркало, покрытое пылью. В этом случае мы увидим и светлое пятно на пыльном зеркале, и зеркальное отражение на другой стене, но оно будет уже меньшей яркости, чем при отражении от чистого зеркала.

Это случай смешанного отражения, в котором наблюдаются и зеркальное, и диффузное отражения.

**Коэффициент отражения (альbedo).** Важной характеристикой диффузной отражательной способности является коэффициент отражения или альbedo (от лат. *albedo* – белизна, от лат. *albus* – белый, светлый).

**Коэффициент отражения (альbedo)** – это безразмерная величина, которая показывает, какая часть волны отражается от поверхности. Коэффициент отражения равен отношению потока энергии отражённой волны к потоку энергии волны, падающей на рассматриваемую границу раздела двух сред.

$$A = \frac{\Phi_{\text{отр}}}{\Phi_{\text{пад}}}$$

Коэффициент отражения измеряется в процентах или в частях от единицы. Коэффициент отражения зависит от свойств отражающей поверхности и от частоты падающей волны.

Отражение волн (особенно света) имеет огромное значение. Действительно, многие окружающие нас тела сами не светятся, но на них падает свет от других источников (Солнца, лампочек, прожекторов и т.п.). Поэтому мы можем видеть эти тела благодаря отражению света от их поверхностей.

## § 14. Преломление волн. Закон Снеллиуса

**Преломление волн** – это изменение направления распространения волн, наблюдаемое при переходе границы раздела двух сред. Преломление волн обусловлено различием фазовой скорости движения волны в этих средах.

Любые волны преломляются на границе раздела двух сред по одному и тому же закону.

Луч падающий ( $CO$ ), луч преломлённый ( $OD$ ) и нормаль к границе раздела двух сред в точке падения луча лежат в одной плоскости (рис. 7).



Виллеброрд Снелл (Снеллиус) ван Ройен (1580–1626)

Отношение синуса угла падения  $\alpha$  к синусу угла преломления  $\beta$  есть величина постоянная для волн данной частоты и природы при любых углах падения (**Закон Снеллиуса**):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n,$$

где  $n$  – **показатель преломления** второй среды относительно первой.

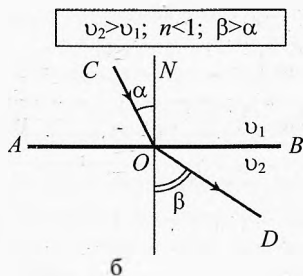
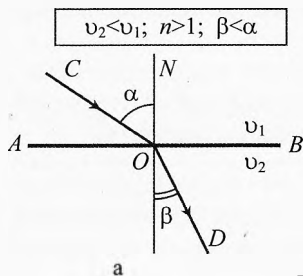


Рис. 7. Преломление волн

Показатель преломления показывает, в какой мере изменяется угол преломления по сравнению с углом падения: уменьшается при  $n > 1$  и увеличивается при  $n < 1$ .

Закон преломления открыл экспериментально голландский ученый В. Снеллиус в 1621 г., поэтому он называется законом Снелля или Снеллиуса.

Ниже на основе принципа Гюйгенса будет показано, что показатель преломления определяется отношением фазовой скорости волны в первой среде к фазовой скорости волны во второй среде:

$$n = \frac{v_1}{v_2}.$$

Если во второй среде волна распространяется медленнее, чем в первой, то  $n > 1$ , а угол преломления меньше угла падения (рис. 7а). Если же во второй среде волна распространяется быстрее, то  $n < 1$ , а угол преломления больше угла падения (рис. 7б).

**Пример 1.** При температуре  $8^\circ\text{C}$  скорость звука в воздухе равна  $v_1 = 333$  м/с, а скорость звука в воде  $v_2 = 1435$  м/с. Найти показатель преломления при переходе звуковой волны из воздуха в воду.

✓ **Ответ.**  $n = \frac{v_1}{v_2} = \frac{333 \text{ м/с}}{1435 \text{ м/с}} \approx 0,23$ .

**Пример 2.** Определить угол преломления, если угол падения звуковой волны на границу раздела воздух–вода равен  $\alpha = 12^\circ$  (рис. 8).

→ **Решение.**  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$ , где  $n = 0,23$  (см. преды-

дущий пример). Значит,  $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}$ ,

$$\sin \beta = \frac{\sin(12^\circ)}{0,23} \approx \frac{0,208}{0,23} \approx 0,90, \quad \beta = 64^\circ. \leftarrow$$

✓ **Ответ.** Угол преломления звуковой волны равен  $\beta = 64^\circ$ . Он больше, чем угол падения на  $52^\circ$ .

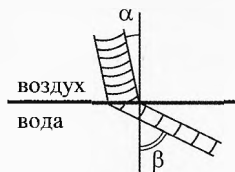


Рис. 8. Преломление звука

**Пример 3.** Луч света из воздуха падает в воду под углом  $\alpha = 45^\circ$ . Показатель преломления воды относительно воздуха равен  $n = \frac{4}{3} \approx 1,33$ . Найти угол преломления. Насколько при этом изменилось направление распространения света?

→ **Решение.**  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \Rightarrow \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}$ ,  
 $\sin \beta \approx 0,53, \Rightarrow \beta = 32^\circ$ .

При переходе через границу воздух–вода луч света меняет своё направление на угол  $\delta$  (рис. 9):

$$\delta = \alpha - \beta = 13^\circ. \leftarrow$$

✓ **Ответ.** Угол преломления равен  $\beta = 32^\circ$ , при этом луч отклонился на угол  $\delta = 13^\circ$ .

**Примечание.** Из этих примеров видно, что звук преломляется на границе воздух–вода значительно больше, чем свет.

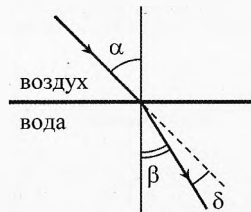


Рис. 9. Преломление света

**Абсолютный показатель преломления.** Для электромагнитных волн, в том числе для света, вводится абсолютный показатель преломления.

**Абсолютный показатель преломления** показывает, в какой мере преломляются лучи при переходе электромагнитных волн из вакуума в данную среду.

Пусть свет из вакуума переходит в среду I, где скорость света равна  $v_1$  (рис. 10а). При переходе из вакуума в любую среду угол преломления будет меньше угла падения, так как скорость электромагнитных волн в вакууме больше, чем в любой другой среде:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta_1} = n_1, \text{ где } n_1 = \frac{c}{v_1}, n_1 > 1. \quad (1)$$

Пусть теперь свет под тем же углом падения  $\alpha$  переходит в среду II, скорость света в которой равна  $v_2$  (рис. 10б):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta_2} = n_2, \text{ где } n_2 = \frac{c}{v_2}, n_2 > 1. \quad (2)$$

Пусть теперь свет падает из среды I в среду II (рис. 10в).



Рис. 10. Абсолютный показатель преломления

Согласно закону преломления:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \text{ где } n = \frac{v_1}{v_2}. \quad (3)$$

Учитывая, что  $n_1 \cdot v_1 = c$  из (1) и  $n_2 \cdot v_2 = c$  из (2), получим:

$$n_1 \cdot v_1 = n_2 \cdot v_2 \quad \text{или} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Подставляя в (3), получим:

$$n = \frac{n_2}{n_1}.$$

**Показатель преломления второй среды относительно первой равен отношению абсолютного показателя преломления  $n_2$  второй среды к абсолютному показателю преломления  $n_1$  первой среды.**

**Полное внутреннее отражение.** Полное внутреннее отражение происходит при прохождении волны из среды с большим показателем преломления  $n_1$  в среду с меньшим показателем преломления  $n_2$  под углом падения, превышающим предельный угол  $\alpha_{\text{пр}}$ , при котором угол преломления равен  $90^\circ$ :

$$\frac{\sin \alpha_{\text{пр}}}{\sin 90^\circ} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \boxed{\sin \alpha_{\text{пр}} = \frac{n_2}{n_1}}$$

Полным внутренним отражением объясняется блеск капелек росы, бриллианта, распространение света по световодам (оптоволокно). Впервые полное внутреннее отражение описано в XVII в. Иоганном Кеплером как прямое следствие закона преломления света.

**Пример 4.** При каком угле падения звуковой волны на границу раздела воздух–вода угол преломления станет предельным, при котором вся энергия звука полностью отразится в первую среду, то есть в воздух (см. пример 1)?

**Решение.** При увеличении угла падения  $\alpha$  угол преломления  $\beta$  будет увеличиваться, пока не станет равным  $90^\circ$  (рис. 11):

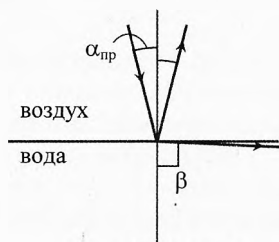
$$\frac{\sin \alpha_{\text{пр}}}{\sin 90^\circ} = n.$$

Так как  $\sin 90^\circ = 1$ , то предельный угол падения:

$$\sin \alpha_{\text{пр}} = n, \quad \sin \alpha_{\text{пр}} = 0,23 \Rightarrow \alpha_{\text{пр}} = 13,3^\circ.$$

Оказывается, большая часть звуковых волн, падающих на поверхность воды, отражается. ←

✓ **Ответ.** Звук полностью отражается от границы раздела воздух–вода при углах падения более  $13,3^\circ$ .



**Рис. 11.** Полное внутреннее отражение

**Пример 5.** Рыбаки ловят рыбу в безветренную погоду с берега озера. Распугают ли они рыбу, если будут громко беседовать?

✓ **Ответ.** Не распугают, ибо при углах падения более  $13,3^\circ$  звук уже полностью отражается от границы раздела воздух–вода и в воду не попадает.

**Пример 6.** Вычислить угол полного внутреннего отражения света для границы вода–воздух. Показатель преломления воды  $n = 4/3$ , показатель преломления воздуха принять равным единице.

➔ **Решение.** В отличие от звука свет в воздухе распространяется быстрее, чем в воде. Поэтому полное внутреннее отражение света может наблюдаться только при переходе из воды в воздух.

$$\frac{\sin \alpha_{\text{пр}}}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{n} \Rightarrow \sin \alpha_{\text{пр}} = \frac{1}{n} = 0,75, \quad \alpha_{\text{пр}} = 48,6^\circ.$$

Значит, при угле падения более  $48,6^\circ$  на границу раздела вода–воздух свет не будет проходить через неё, а будет испытывать полное внутреннее отражение (рис. 12).

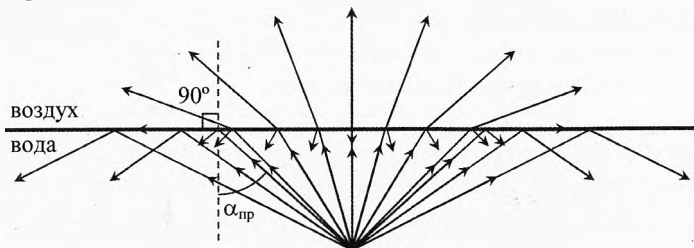


Рис. 12. Полное внутреннее отражение

Это легко проверить, если нырнуть под воду в плавательных очках и посмотреть, до какого угла падения будет виден потолок бассейна или небо над открытым водоёмом.

Необходимо отметить, что *частичное отражение* света от границы раздела вода–воздух будет и при углах, меньших  $48,6^\circ$ . И чем ближе угол падения лучей к предельному, тем большая доля светового потока отражается. ➔

## § 15. Принцип Гюйгенса

Законы отражения и преломления можно доказать на основе принципа Гюйгенса.

Этот принцип открыл в 1678 г. голландский математик, физик, астроном, изобретатель Христиан Гюйгенс. Он разработал волновую теорию света и опубликовал её в 1690 г. в «Трактате о свете». Объясняя механизм распространения света, он выдвинул принцип, носящий его имя.



Христиан Гюйгенс  
(1629–1695)

Каждая точка пространства, до которой дошли колебания, становится источником вторичных сферических волн. Огибающая этих волн даёт положение фронта волны в следующий момент времени.

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся направо (рис. 13). От каждой точки фронта  $AB$  волны, согласно принципу Гюйгенса, движется вторичная сферическая волна. Новый фронт волны  $A_1B_1$  является огибающей вторичных волн. Как видно из рисунка, новый фронт тоже плоский, и за время  $\Delta t$  он переместился на расстояние

$$AA_1 = v \cdot \Delta t,$$

где  $v$  – скорость распространения волны.

Аналогично, новый фронт сферической волны тоже имеет сферическую форму, но с радиусом большим на  $\Delta r$  (рис. 14):

$$\Delta r = r_2 - r_1 = v \cdot \Delta t.$$

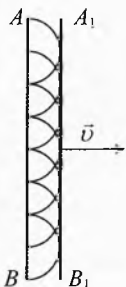


Рис. 13. Плоская волна

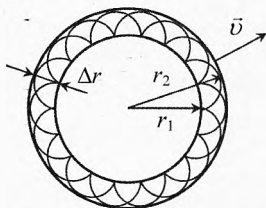


Рис. 14. Сферическая волна

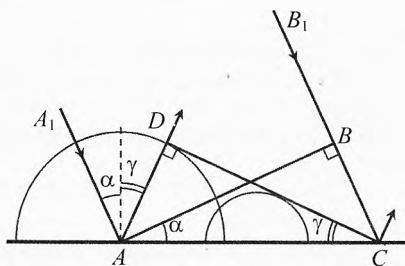


Рис. 15. Отражение волны

**Закон отражения.** Докажем на основе принципа Гюйгенса закон отражения.

Пусть параллельный пучок волн, ограниченный лучами  $A_1A$  и  $B_1B$ , падает под углом  $\alpha$  на плоскую отражающую поверхность (рис. 15).

При касании фронта отражающей поверхности в точке  $A$  в ней возбуждаются колебания, и вторичная сферическая волна начинает двигаться в обратном направлении с той же скоростью.

Найдём положение фронта волны через время  $t$ , когда точка  $B$  поверхности волны успеет достигнуть границы раздела в точке  $C$ .

Пусть скорость волны равна  $v$ , тогда расстояние  $BC$ :

$$BC = v \cdot t.$$

За это время вторичная волна из точки  $A$  достигнет точки  $D$ :

$$AD = v \cdot t.$$

До точек поверхности, находящихся между точками  $A$  и  $C$ , волна дойдет позже, чем до точки  $A$ . Поэтому вторичные волны от таких точек поверхности распространятся назад на расстояние, меньшее  $AD$ .

От точки  $C$  к моменту времени  $t$  распространение волны ещё не начнется, ибо к этому моменту точка  $C$  только будет достигнута первичной волной.



Построив огибающую всех вторичных сферических волн, найдём линию  $CD$  – положение фронта отражённой волны; этот фронт распространяется с той же скоростью  $v$  по направлению  $AD$ .

Как видно из двух предыдущих уравнений:

$$AD = BC.$$

Учитывая, что треугольники  $\triangle ABC$  и  $\triangle CDA$  прямоугольные и у них общая гипотенуза  $AC$ , получаем, что эти треугольники равны:

$$\triangle ABC = \triangle CDA.$$

Значит, соответствующие углы этих треугольников тоже равны:

$$\alpha = \gamma$$

где  $\gamma$  – угол отражения волны.

Итак, используя принцип Гюйгенса, мы получили закон отражения

### || Угол падения равен углу отражения.

Такой результат обусловлен тем, что скорость падающей и отражённой волн одинакова.

**Закон преломления.** Докажем на основе принципа Гюйгенса закон преломления.

Пусть на границу раздела двух сред под углом  $\alpha$  падает плоская волна (рис. 16). И пусть в начальный момент времени фронт волны  $AB$  достиг границы раздела в точке  $A$ .

Найдём положение фронта волны через время  $t$ , когда точка  $B$  поверхности волны успеет достигнуть границы раздела в точке  $C$ . Пусть скорость волны в первой среде равна  $v_1$ , тогда расстояние  $BC$  равно

$$BC = v_1 \cdot t.$$

Фронт вторичной волны можно легко найти, если выбрать в качестве центров вторичных волн точки, лежащие на границе раздела. Пусть скорость волны во второй среде равна  $v_2$ , тогда за время  $t$  преломлённая волна пройдёт во второй среде расстояние

$$AD = v_2 \cdot t.$$

Поскольку точка  $E$  будет достигнута первичной волной несколько позже точки  $A$ , то и вторичная волна от неё успеет к моменту времени  $t$  проникнуть во вторую среду на меньшую глубину, равную  $EF$ ; от точки  $G$  глубина проникновения будет ещё меньше –  $GH$ ; от точки  $C$  к моменту времени  $t$  распространение волны ещё не начнется, ибо к этому моменту точка  $C$  будет только достигнута первичной волной.

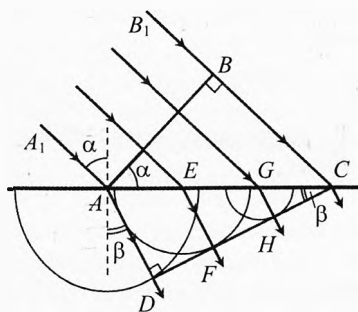


Рис. 16. Преломление волны

Построив огибающую всех вторичных сферических волн, найдём линию  $CD$  — положение фронта преломлённой волны; этот фронт распространяется во второй среде со скоростью  $v_2$  по направлению  $AD$ .

Из  $\triangle ABC$  следует:

$$AC \cdot \sin \alpha = BC.$$

Из  $\triangle ADC$  следует:

$$AC \cdot \sin \beta = AD,$$

где  $\beta$  — угол преломления волны.

Подставляя  $BC$  и  $AD$  из двух предыдущих уравнений, получим:

$$AC \cdot \sin \alpha = v_1 \cdot t \quad \text{и} \quad AC \cdot \sin \beta = v_2 \cdot t.$$

Разделив одно уравнение на другое, получим закон преломления:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Если обозначить отношение  $v_1 / v_2$  через  $n$ , то получим закон преломления в обычной его форме

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

Величина  $n$  не зависит от углов  $\alpha$  и  $\beta$  и носит название показателя преломления.

Используя принцип Гюйгенса, мы не только нашли закон преломления, но и объяснили физический смысл показателя преломления  $n$ .

**Показатель преломления равен отношению скорости волны в первой среде к скорости её во второй:**

$$n = \frac{v_1}{v_2}.$$

## § 16. Дисперсия волн

Почему волны преломляются при прохождении границы раздела двух сред?

Волна, падающая на вещество, вызывает вынужденные колебания его частиц. В результате эти вынужденные колебания распространяются с определённой скоростью в виде волн.

Если волна переходит в другое вещество, то вынужденные колебания частиц во второй среде передаются с другой скоростью.

При нормальном падении лучей волны из одной среды в другую волна во второй среде движется в прежнем направлении, но с меньшей (или большей) скоростью.

Если же угол падения лучей не равен нулю, то из-за разницы скорости волны в двух средах наблюдается преломление в соответствии с законом Снелля.

Рассмотрим теперь более сложный случай. Пусть на границу раздела двух сред падает параллельный пучок, представляющий собой группу волн с различными частотами. Оказывается, что фазовые скорости волн разных частот в данной среде могут быть различными.

Поскольку в падающем пучке волны разных частот движутся параллельно, значит у всех волн один и тот же угол падения  $\alpha$ . Однако при переходе границы раздела двух сред волны различной частоты преломятся на различные углы из-за разного отношения скоростей в первой и второй средах. Поэтому параллельный пучок из группы волн разной частоты во второй среде будет распространяться расширенным.

Это явление называется дисперсией (от лат. *dispersio* – рассеяние, разложение).



Исаак Ньютон (1643–1727)

**Дисперсия волн** – это разброс направления распространения группы волн различных частот при прохождении границы раздела двух сред. Дисперсия обусловлена зависимостью показателя преломления волны от частоты.

Термин «дисперсия» ввёл в физику И. Ньютон в 1672 г. при описании разложения пучка белого света, преломляющегося на границе раздела двух сред.

Ньютон установил трёхгранную призму на пути параллельного пучка белого света, прошедшего через отверстие в ставне окна. При прохождении



Рис. 17. Дисперсия волн в стеклянной призме

\* Ставни – закрывающее окно дощатое полотно. Аналог современных жалюзи.

через призму свет преломляется дважды: сначала на границе раздела воздух–стекло, а потом на границе стекло–воздух (рис. 17). Заметим, что дисперсия на рисунке несколько гиперболизирована для наглядности.

*Наименьшее преломление испытал свет красного цвета, частота которого минимальна, а наиболее сильно преломился свет фиолетового цвета, частота которого максимальна.*

Ньютон установил порядок расположения основных цветов: *красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синий, фиолетовый*. Этот порядок можно запомнить по следующей фразе: каждый охотник желает знать, где сидит фазан (или каждый огородник желает знать, где сажать фасоль).

Согласно классической электронной теории, разработанной в конце XIX века голландским физиком Х. А. Лоренцем, дисперсия рассматривается как результат вынужденных колебаний электронов, входящих в состав атома, под действием электромагнитной волны, падающей на вещество.

Наиболее точно дисперсию описывает квантовая теория.

Дисперсия присуща всем средам, кроме физического (абсолютного) вакуума.

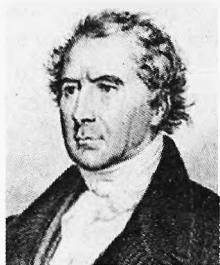
Наиболее близко к абсолютному вакууму межзвёздное пространство, в котором средняя концентрация веществ составляет примерно  $10^4$  атом/м<sup>3</sup>.

Астрономические наблюдения свидетельствуют об отсутствии дисперсии света в межзвёздном пространстве. Например, французский физик Доминик Франсуа Араго пытался измерить разность скоростей синего и красного цвета, испускаемого двойной звездой Альголь (Эль-Гуль – дьявол). Однако оказалось, что скорости распространения волн, синего и красного цвета равны.

Итак, любые группы механических или электромагнитных волн испытывают дисперсию, то есть разброс направления распространения волн разной частоты после прохождения границы раздела двух сред, обусловленный зависимостью показателя преломления от частоты волны (фазовой скорости волны в среде от её частоты).



Хендрик Антон  
Лоренц (1853–1928)



Франсуа Доминик  
Араго (1786–1853)

## § 17. Поляризация волн. Закон Малюса. Закон Брюстера

**Поляризация волн.** В продольных волнах колебания происходят вдоль направления распространения волны (например, звуковые колебания), а в поперечных волнах – перпендикулярно направлению распространения (например, волны на море, колебания струны, электромагнитные колебания).

Возьмём две щели (два узких ящика без дна и крышки). Пропустим через них резиновый шнур. Конец шнура закрепим на стене. А на другом конце создадим продольные волны (растягивая в большей или меньшей степени резиновый шнур). Они будут распространяться независимо от ориентации щелей. То есть щели не влияют на распространение продольных волн.

Создадим теперь поперечную волну. Для этого можно прикрепить второй конец шнура к диску, вращающемуся с помощью мотора, или создать круговое вращение шнура рукой (рис. 18). В этом случае возникнет поперечная волна, плоскость колебаний которой будет вращаться. Такая волна является аналогом естественной световой волны.



Рис. 18. Поляризация волн

После прохождения первой щели волна будет распространяться с колебаниями только вдоль оси этой щели.

Если на пути этой волны окажется вторая щель, параллельная первой, то волна пройдёт через неё без изменений. Если наклонить вторую щель на угол больше  $0^\circ$ , но меньше  $90^\circ$ , то через вторую щель колебания пройдут, но уже с меньшей амплитудой.

Если же оси щелей окажутся перпендикулярными друг другу, то колебания через вторую щель не пройдут вовсе.

Волна до прохождения первой щели не была поляризованной. А после – стала плоско-поляризованной, то есть волной с определённым направлением колебаний.

Поперечные волны с выделенным определённым направлением колебаний называются **поляризованными волнами** (от греч. *polos* – ось, полюс).

В нашем опыте первую щель можно назвать поляризатором; она выделяет колебания определённого направления. А вторую щель – анализатором; она позволяет обнаружить то, что волна поляризована, а также определить плоскость поляризации.

**Поляризатор** – устройство, предназначенное для выделения поперечных колебаний определённой ориентации.

**Анализатор** – поляризатор, предназначенный для определения степени поляризации волны и направления плоскости колебаний.

Аналогичные опыты можно провести с электромагнитными, в частности световыми, волнами. Некоторые кристаллы, например пластинки из турмалина, подобно щели в описанном выше опыте с механическими волнами, пропускают световые волны только определённого направления колебаний.

Посмотрим на светящуюся лампу накаливания через такую пластинку. Мы увидим светящуюся спираль лампы, но, поворачивая пластинку, не заметим изменения яркости спирали лампочки.

Если же параллельно первой пластине расположить вторую такую же пластину и вращать одну из них, то интенсивность света, попадающего в глаз наблюдателя, будет меняться. Если вначале она была максимальна, то при повороте на  $90^\circ$  интенсивность изменится до минимума (при достаточной толщине пластин – до нуля). Это случится, когда оптические оси пластин будут расположены перпендикулярно друг другу. При дальнейшем повороте пластины мы вновь увидим светящуюся спираль. При угле между оптическими осями  $180^\circ$  интенсивность света, прошедшего через анализатор, вновь будет максимальной.



Этьен Луи Малюс  
(1775–1812)

**Закон Малюса.** Зависимость интенсивности плоско-поляризованного света после его прохождения через анализатор от угла между плоскостью поляризации падающего света и осью анализатора выражается **законом Малюса** (рис. 19).

Интенсивность света  $I$ , прошедшего через анализатор, пропорциональна интенсивности падающего на анализатор света  $I_0$ , и квадрату косинуса угла  $\varphi$  между плоскостью поляризации световой волны и плоскостью пропускания анализатора:

$$I = k \cdot I_0 \cdot \cos^2 \varphi$$

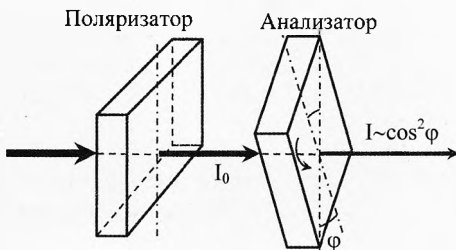


Рис. 19. Закон Малюса

где  $k$  – коэффициент прозрачности анализатора.

Это соотношение открыл в 1808 г. французский физик Э. Л. Малюс. Он также открыл поляризацию света при отражении. В 1811 г. он обнаружил поляризацию света при преломлении.

**Закон Брюстера.** В 1815 г. шотландский физик Дэвид Брюстер установил связь между показателем преломления  $n$  диэлектрика и углом падения  $\alpha_{\text{Бр}}$  света, при котором отражённый от поверхности диэлектрика свет полностью поляризован.

*Свет, отражённый от диэлектрика полностью поляризован, когда тангенс угла падения лучей  $\alpha_{\text{Бр}}$  равен показателю преломления  $n$  диэлектрика относительно среды, из которой свет попадает на диэлектрик (Закон Брюстера):*

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{Бр}} = n$$

При этом отражённый и преломлённый лучи взаимно перпендикулярны (рис. 20).

В отражённом свете вектор напряжённости  $\vec{E}_{\text{отр}}$  электрического поля электромагнитной волны колеблется перпендикулярно к плоскости падения. Преломлённый свет частично поляризован: электрический вектор  $\vec{E}_{\text{прел}}$  преломлённой волны колеблется преимущественно в плоскости падения.

Основатели волновой теории английский ученый Томас Юнг и французский физик Огюстен Френель считали длительное время световые волны продольными, подобно звуковым волнам. Однако под давлением новых фактов, которые не удавалось истолковать, считая свет продольными волнами, Френель был вынужден признать, что свет – это поперечные волны.

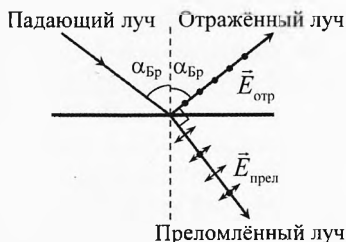


Рис. 20. Закон Брюстера



Дэвид Брюстер  
(1781–1868)



Альберт Абрахам  
Майкельсон (1852–1931)



Альберт Эйнштейн  
(1879–1955)

В то время свет рассматривался как упругие волны в эфире, заполняющем пространство и проникающем внутрь всех тел. С точки зрения механи-

ческого эфира поперечные волны могут существовать только в твёрдом теле. А если свет — это поперечные волны, что следует из опытов по поляризации света, то почему эфир не мешает движению тел на Земле, планет вокруг Солнца и т.п.?

Но практика есть критерий истины. Френель оказался прав, признав поперечность световых волн. Однако проблема эфира висела над физиками ещё сто лет, пока опыты А. А. Майкельсона и гений А. Эйнштейна не привели к мысли, что эфир не существует.

Следует отметить, что в электромагнитной волне векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  синхронно колеблются по гармоническому закону во взаимно перпендикулярных плоскостях и перпендикулярно направлению распространения волны (рис. 21).

Но когда речь идёт о прохождении электромагнитной волны (света) через пластинку турмалина, то имеется в виду только электрический вектор  $\vec{E}$  волны. Дело в том, что большинство приборов, предназначенных для обнаружения и измерения света (глаз, фотопластинка, фотоэлемент) реагируют на электрический вектор световой волны, поэтому вектор  $\vec{E}$  называют световым вектором. И под плоскостью колебаний волны понимается плоскость, в которой расположены вектор  $\vec{E}$  и вектор скорости  $\vec{v}$  волны.

Свет, падающий от произвольного источника: Солнца, лампочки, костра, — естественный. Колебания вектора  $\vec{E}$  происходят по всевозможным направлениям в плоскости, перпендикулярной скорости волны. Когда естественный свет проходит через определённым образом вырезанный кристалл (исландского шпата, турмалина) или поляроидную плёнку, то они выделяют колебания только одного направления. Свет выходит из поляризатора плоско-поляризованным. Интенсивность его будет меньше, но для нашего глаза собственно поляризация его при этом незаметна: при вращении поляризатора интенсивность света не изменится.

Но если между глазом и поляризатором поместить ещё такую же пластинку (анализатор) и поворачивать её, то наш глаз воспримет изменяющуюся интенсивность света в соответствии с законом Малюса.

**Применение поляризации.** Поляризация света находит широкое применение в научных исследованиях и повседневной жизни.

Поляроиды используют для гашения зеркально отражённых бликов, например при фотографировании картин, стеклянных витрин. Зеркально отражённый свет частично поляризован. Чтобы устранить ненужные световые блики, на фотообъектив надевают поляризационный фильтр. Этот же эффект используется при фотографировании объектов на фоне яркого неба.

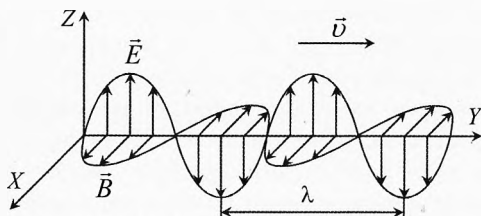


Рис. 21. Электромагнитная волна



Поляризацию используют в солнечных поляризационных очках.

Также её используют в очках для просмотра трёхмерных фото- и видеоизображений. Например, в кинотеатрах IMAX 3D установлены два проектора (для левого и правого глаза), которые с помощью специальных фильтров поляризуются соответственно в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Расположенные соответствующим образом фильтры в очках зрителей «извлекают» из светового потока отдельные изображения для левого и правого глаза.

В строительной и машиностроительной технике явление поляризации используется для изучения напряжений, возникающих в отдельных узлах сооружений и машин. Сущность этого метода, называемого фотоупругим, заключается в следующем. Из прозрачного материала (например, органического стекла) изготавливают точную плоскую копию той детали, нагрузку которой надо изучить. Затем эту модель ставят между анализатором и поляризатором, освещают со стороны поляризатора и проецируют на экран. Так как недеформированная пластина органического стекла оптически однородна, то на экране видны лишь её контуры. При деформации модели оптическая однородность органического стекла нарушается и на экране появляется цветная картина возникающих в детали напряжений.

Поляризацию используют в декоративных целях (например, при устройстве витрин, в театральных постановках и т.д.), в геологии и ряде других областей науки и техники.

## § 18. Двойное лучепреломление. Дихроизм

**Двойное лучепреломление.** В некоторых кристаллах пучок света разделяется на два с различными показателями преломления. Раздвоение пучка света обнаружил в 1690 г. Х. Гюйгенс, экспериментируя с исландским шпатом.

**Двойное лучепреломление** – эффект расщепления в анизотропных средах луча света на две составляющие.

Двойное лучепреломление обусловлено анизотропией (от греч. *anisos* – неравный и *tropos* – направление), то есть зависимостью физических свойств вещества от направления. В таких кристаллах по разным направлениям различны механическая прочность, теплопроводность и оптические свойства. Например, скорость электромагнитных волн (света) зависит от ориентации вектора напряжённости  $\vec{E}$  в падающей волне относительно оптической оси кристалла.

Напомним, что в естественном свете колебания вектора  $\vec{E}$  происходят по всевозможным направлениям в плоскости, перпендикулярной скорости распространения света (луча).

Если направить естественный свет вдоль оптической оси анизотропного кристалла, то пучок света не преломляется и не раздваивается, т.к. структура кристалла симметрична относительно этого направления.

Если же пучок естественного света направить на кристалл под углом  $\alpha$  к оптической оси, то из кристалла выйдут два пучка света. Их называли обыкновенным и необыкновенным. Обыкновенный пучок подчиняется закону преломления Снелля. Для него показатель преломления не зависит от угла падения. В обыкновенном пучке кристалл пропускает колебания вектора  $\vec{E}$  только в направлении, перпендикулярном оптической оси (рис. 22). Скорость обыкновенного луча минимальна и не зависит от угла падения, поэтому показатель преломления для обыкновенного луча максимален:

$$n_{\text{обыкн}} = \frac{c}{v_{\text{обыкн}}}.$$

В необыкновенном пучке кристалл пропускает только колебания, происходящие перпендикулярно колебаниям в обыкновенном луче. Скорость света в необыкновенном луче зависит от направления колебаний вектора  $\vec{E}$  относительно оптической оси кристалла. Поэтому при разных углах падения показатель преломления для необыкновенного луча различен.

**Дихроизм.** Поляризатором, то есть устройством, превращающим естественный свет в плоско-поляризованный, может служить пластинка турмалина, вырезанная из кристалла параллельно его оптической оси. Действие турмалиновой пластинки заключается в том, что она пропускает колебания, когда вектор  $\vec{E}$  параллелен оптической оси. Колебания, вектор  $\vec{E}$  которых перпендикулярен оптической оси, пластинка практически не пропускает – волна сильно поглощается.

**Дихроизм** – явление, состоящее в различном поглощении веществом света в зависимости от поляризации (направления колебаний вектора  $\vec{E}$ ).

Для практического использования турмалин очень дорог и неудобен, т.к. нельзя вырезать из него пластины больших размеров. Поэтому более распространены в качестве поляризаторов специальные дихроические плёнки, помещённые между стеклянными пластинками, например, плёнки из кристалликов герпатита.

**Анализатор.** Анализатор, как и в случае механических волн, позволяет определить, какова плоскость колебаний света (рис. 23). Анализатор по своей конструкции ничем не отличается от поляризатора. Разница в функциях: поляризатор выделяет из естественного света пучок с одинаковым направлением ко-

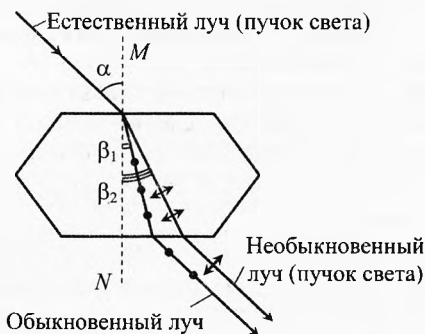


Рис. 22. Двойное лучепреломление

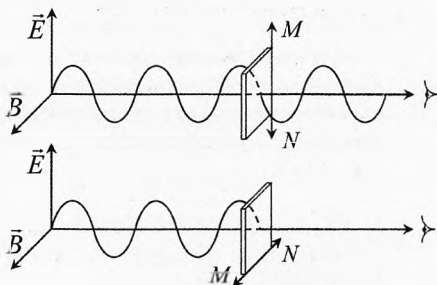


Рис. 23. Анализатор

лебаний вектора  $\vec{E}$ , а анализатор служит для определения направления этих колебаний. Поэтому, поляризатор и анализатор взаимозаменяемы, и носят общее название *поляроиды*.

**Оптическая активность и вращение плоскости поляризации.** С помощью экспериментов обнаружено, что растворы некоторых веществ (сахара, глюкозы, белков, органических растворов и др.) могут поворачивать плоскость колебаний вектора  $\vec{E}$  электромагнитной волны (света), проходящей через раствор (рис. 24).

Такие вещества называются оптически активными. Измеряя угол, на который повернулась плоскость колебаний вектора  $\vec{E}$ , можно определить концентрацию вещества в растворе. Угол поворота  $\varphi$  плоскости колебаний вектора  $\vec{E}$  пропорционален числу молекул активного вещества, встретившихся пучку молекул на длине  $l$  кюветы. Поэтому он пропорционален произведению длины кюветы  $l$  и концентрации раствора  $n_{\text{раств}}$ :

$$\varphi = \alpha \cdot l \cdot n_{\text{раств}},$$

где  $\alpha$  называется удельным вращением, оно равно углу поворота плоскости колебаний на единицу толщины раствора при единичной концентрации. Удельное вращение определяется опытным путем и приводится в таблицах.

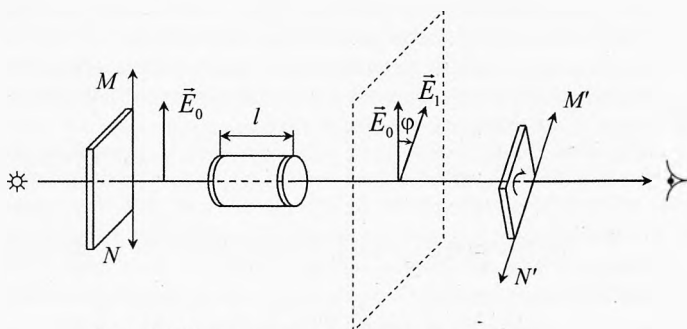


Рис. 24. Вращение плоскости поляризации

Удельное вращение зависит от частоты волны и рода оптически активного вещества. Прибор для измерения угла поворота плоскости колебаний при прохождении света через активное вещество называется *поляриметром*. С помощью поляриметра можно определять с высокой точностью толщину оптически активного вещества или его концентрацию.

На практике широко применяются сахариметры для определения концентрации сахара в чае, крови и т.д.

## § 19. Сложение волн. Интерференция

**Сложение волн.** Пусть в данной области пространства находится несколько источников волн. Пусть в данной точке каждая из них создала бы колебания амплитудой  $\vec{A}_1$ ,  $\vec{A}_2$ ,  $\vec{A}_3$  и т.д. в каком угодно направлении. Какова

же будет амплитуда  $\vec{A}$  результирующего колебания? На этот вопрос отвечает принцип суперпозиции (сложения) волн.

*Каждый источник создаёт колебания независимо от наличия других источников. Результирующая амплитуда колебаний в данной точке равна векторной сумме амплитуд колебаний, созданных волнами, приходящими от всех источников:*

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \dots$$

Если нас интересует результирующее колебание по определённому направлению, то нужно алгебраически сложить проекции векторов (например, напряжённости электрического поля) от всех приходящих в эту точку волн на данное направление:

$$E_x = E_{x1} + E_{x2} + E_{x3} + \dots$$

То, что принцип суперпозиции при сложении волн имеет место всегда и везде, очень удивительно.

Приведём примеры. Звучит камертон «ля» первой октавы частотой 440 Гц, эти колебания в виде волн распространяются без искажения в однородной среде. Звучит чувственный голос тенора, сложные колебания голосовых связок певца передаются волнами в воздухе со всеми оттенками тембра и волнуют чувственную сферу многих женщин, и не только их. Звучит хор из десятков, сотен и даже тысяч людей, колебания молекул воздуха содержат звуковую информацию обо всех (и каждом) участниках хора. Если кто-то запел немного не так, то дирижер моментально заметит нарушителя гармонии и лада. И всё это благодаря наличию суперпозиции волн.

Другой пример. На антенну радиостанции попадают волны от огромного числа радиостанций. У каждой из них своя несущая частота. Электроны в проводах антенны совершают сложнейшие колебания в соответствии с направлением, частотой и амплитудой сигналов всех приходящих радиоволн. Слушатель настраивает свой радиоприёмник с помощью приёмного колебательного контура на нужную ему несущую частоту. Как же это возможно?

Благодаря очень маленькой инертности (массе) электрона и его довольно большому заряду (мере способности к электромагнитным взаимодействиям), а также наличию в природе принципа суперпозиции полей, одна антенна с радиоприёмным устройством может получить информацию от огромного количества источников радиоволн.

**Когерентные волны. Интерференция.** Очень интересен случай сложения когерентных волн.

*Когерентные волны – это волны, колебания в которых приходят с одинаковой частотой в данную точку и неизменной разностью фаз.*

Своё название они получили от лат. *cohaerens* – находящиеся в связи, согласованные.

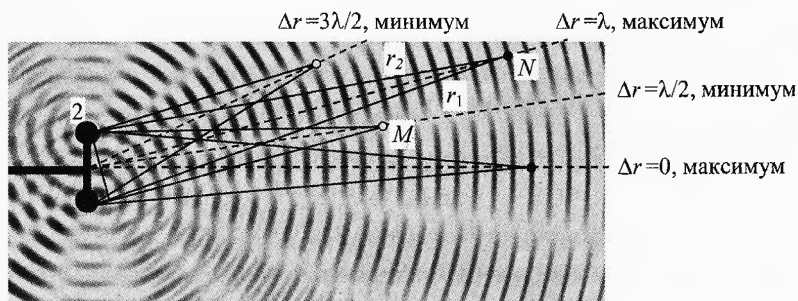


Рис. 25. Интерференция когерентных волн

Механические когерентные волны легко создать на поверхности воды в ванночке. Если к вибратору прикрепить планку с двумя (четырьмя) наконечниками, опустить в воду и привести планку в колебательный режим с помощью вибратора, то от каждого наконечника по поверхности побежит волна (рис. 25). Поскольку колебания источников синхронны, то создаваемые ими волны будут когерентны, и в каждую точку ванночки они будут приходить с некоторой неизменной для данной точки разностью фаз.

По оси симметрии, проходящей перпендикулярно планке по её середине, разность фаз от двух источников волн будет равна нулю. Колебания вдоль этой линии происходят синхронно с максимальной амплитудой, равной удвоенной амплитуде, создаваемой одним источником.

В точке  $M$ , где разность хода  $\Delta r$  волн от двух источников составит половину длины волны  $\lambda/2$ , колебаний не будет или будут наблюдаться колебания с амплитудой много меньшей, чем от одного источника, из-за того, что в эти точки колебания будут приходить в противофазе.

#### Условие максимума интерференции.

Все точки, в которых разность хода  $\Delta r = r_1 - r_2$  составит целое число длин волн, будет наблюдаться максимальное усиление колебаний, так как совместное ударение происходит синхронно (интерференция от лат. *inter* – взаимно и *ferio* – ударяю):

$$\Delta r_{\max} = k\lambda, \quad \text{где } k = 0, 1, 2, 3 \text{ и т.д.},$$

Такие точки называют **пучностями**. Амплитуда колебаний в этих точках максимальна:

$$A_{\max} = A_1 + A_2,$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – амплитуды колебаний, которые в данной точке создал бы каждый источник в отдельности.

**Условие минимума интерференции.**

В точках, где разность хода составит нечётное число полуволн, колебания приходят в противофазе:

$$\Delta r_{\min} = (2k+1) \frac{\lambda}{2}, \quad \text{где } k = 0, 1, 2, 3 \text{ и т.д.}$$

Такие точки называют **узлами**. В этих точках будет наблюдаться минимум колебаний:

$$A_{\min} = |A_1 - A_2|.$$

Если источники неподвижны относительно ванны, то узлы и пучности не будут перемещаться, то есть будет иметь место стоячая волна.

В точках между пучностями колебания будут происходить с амплитудами меньшими, чем в пучности. И в пределах полуволны от узла до узла в одинаковой фазе, а в соседней полуволне – в противофазе.

**Интенсивность волн при интерференции.** Интенсивность любой волны пропорциональна скорости и квадрату амплитуды (в механических колебаниях – это амплитуда смещения, в электромагнитных волнах – это амплитуда напряжённости  $\vec{E}$  электрического и индукция  $\vec{B}$  магнитного поля).

Если встречаются две когерентные волны с амплитудами  $A_1$  и  $A_2$ , то в точках максимума амплитуда колебаний будет равна:

$$A_{\max} = A_1 + A_2,$$

Тогда общая интенсивность в точках максимума:

$$I_{\max} = k \cdot A_{\max}^2 = k \cdot (A_1 + A_2)^2 = k \cdot A_1^2 + 2k \cdot A_1 A_2 + k \cdot A_2^2,$$

где  $k$  – коэффициент, зависящий от скорости и рода волны.

Итак,

$$I_{\max} = I_1 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} + I_2.$$

Если  $A_1 = A_2$ , то  $I_1 = I_2$ , тогда  $I_{\max} = 4 \cdot I_1$ .

Таким образом, если в данной точке встречаются две волны одинаковой амплитуды, колеблющиеся синхронно, то интенсивность колебаний в этой точке будет в 4 раза больше, чем от одной волны. И в 2 раза больше, чем от обеих волн, если бы они были некогерентными.

В точках минимума, где волны встречаются в противофазе,  $A_{\min} = |A_1 - A_2|$ . Значит,

$$I_{\min} = I_1 - 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} + I_2.$$

Если при этом  $A_1 = A_2$ , то  $I_1 = I_2$ , тогда  $I_{\min} = 0$ , то есть колебания в этих точках отсутствуют. Энергия в эти точки не поступает.

Если  $A_1$  не равно  $A_2$ , то в точке минимума интенсивность колебаний не равна нулю.

**Видность.** Из вышеизложенного следует, что при сложении двух когерентных волн в пространстве в точках максимума колебания происходят с амплитудой  $A_{\max} = A_1 + A_2$ , в точках минимума – с амплитудой  $A_{\min} = |A_1 - A_2|$ , а между ними – с амплитудой в интервале от  $A_{\min}$  до  $A_{\max}$ . Поскольку гребни, впадины и узлы не перемещаются в пространстве, то *интерференционная картина представляет собой стоячую волну*.

Чем больше разница интенсивности волны в точках максимума и минимума, тем контрастнее видна интерференционная картина.

**Видность** – скалярная величина, характеризующая контрастность интерференционной картины, она равна отношению разности интенсивности в точках максимума и минимума к сумме интенсивностей волны в этих точках:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

Например, если амплитуды двух встречающихся когерентных волн одинаковы, то есть  $A_1 = A_2$ , то минимальная интенсивность результирующей волны  $I_{\min} = 0$ , тогда видность равна  $V_1 = 1$ , или 100%.

Пусть амплитуда одной волны в два раза больше, чем другой, то есть  $A_1 = 2A_2$ . В этом случае  $\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 = 4$  или  $I_1 = 4 \cdot I_2$ . Тогда

$$I_{\max} = I_1 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} + I_2 = 4 \cdot I_2 + 2\sqrt{4 \cdot I_2 \cdot I_2} + I_2 = 9 \cdot I_2.$$

$$I_{\min} = I_1 - 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} + I_2 = 4 \cdot I_2 - 2\sqrt{4 \cdot I_2 \cdot I_2} + I_2 = I_2.$$

Тогда видность  $V_2 = \frac{9 \cdot I_2 - I_2}{9 \cdot I_2 + I_2} = 0,8$ , или 80%.

Итак, если амплитуда одной волны вдвое больше, чем другой, то интерференционная картина хорошо видна.

Пусть теперь встречаются когерентные волны с амплитудами, отличающимися на порядок, то есть в 10 раз:  $A_1 = 10A_2$ . В этом случае

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 = 100, \text{ или } I_1 = 100 \cdot I_2. \text{ Тогда}$$

$$I_{\max} = 100 \cdot I_2 + 2\sqrt{100 \cdot I_2 \cdot I_2} + I_2 = 121 \cdot I_2,$$

$$I_{\min} = 100 \cdot I_2 - 2\sqrt{100 \cdot I_2 \cdot I_2} + I_2 = 81 \cdot I_2.$$

Значит, видность равна

$$V_2 = \frac{121 \cdot I_2 - 81 \cdot I_2}{121 \cdot I_2 + 81 \cdot I_2} = \frac{40}{202} \approx 0,2, \text{ или } 20\%.$$

Видность  $V_3 = 0,2$  означает, что глаз вряд ли заметит интерференционную картину.

Отсюда вывод: интерференция наблюдается на тех участках, где амплитуды встречающихся когерентных волн одного порядка, то есть отличается менее чем в 10 раз.

Сформулируем определение явление интерференции.

***Интерференция волн** – это явление, возникающее при наложении двух и более когерентных волн и состоящее в устойчивом во времени их взаимном усилении в одних точках пространства и ослаблении – в других в зависимости от соотношения между фазами этих волн.*

Хорошо наблюдать интерференцию звуковых волн, которые являются продольными. Подключим две звуковые колонки к генератору низкочастотных колебаний. Расположим колонки параллельно на расстоянии нескольких метров. Установим на генераторе некоторую частоту, например 100 Гц, закроем одно ухо и будем медленно передвигаться по классу. В результате обнаружим, что в одних точках звук слышен громче, а в других – тише. Могут быть точки, в которых звука совсем не слышно.

Обратим внимание, что звук в каждую точку приходит не только от колонок, но и отражённый от стен, потолка, но поскольку все эти волны когерентны, то ослабление и усиление звука в различных точках реально наблюдается.

Если же открыть окна, а стены, пол и потолок закрыть мягкими поглощающими звук тканями, то видность, точнее «слышность», интерференционной картины станет больше.

Однако и без дополнительных мер вы будете удивлены, когда обнаружите точки, где звука почти не слышно, хотя колонки звучат на большой мощности.

Для наблюдения интерференции поперечных волн, например упругих волн в твёрдых телах или электромагнитных волн (в том числе света), помимо когерентности волн необходимо, чтобы колебания от разных источников совершались вдоль одного или близких направлений, то есть чтобы складывающиеся когерентные волны были поляризованы в одном или близких направлениях.

## § 20. Интерференция света

Выше мы описали интерференцию механических волн при сложении когерентных звуковых волн.

Проделаем аналогичный опыт со световыми волнами. Пусть над столом висят две одинаковые лампы, свет от которых падает на стол через фильтр, пропускающий монохроматическую волну определённой частоты. Если светит одна лампа, то на столе будет некоторая освещённость. Включив вторую лампу, увидим, что освещённость возросла, но интерференционной картины



нет. Если на лампочки одеть светофильтры с узкой полосой пропускания, то обнаружить интерференцию тоже не удастся.

Дело в том, что волны от двух источников света одинаковой частоты всё же оказываются некогерентными. Атомы излучают волны не непрерывным потоком, а в виде так называемых цугов.

Процесс излучения возбужденного атома длится примерно 10 нс. Длина волнового цуга:

$$l = c \cdot \tau, \quad l = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \cdot 10^{-8} \text{ с} = 3 \text{ м.}$$

В случае фиолетового цвета ( $\lambda = 0,4 \text{ мкм}$ ) в цуге укладывается 7,5 миллионов длин световых волн:

$$N = \frac{l}{\lambda}, \quad N = \frac{3 \text{ м}}{0,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}} = 7,5 \cdot 10^6 \text{ штук.}$$

Многие атомы излучают свет независимо (несогласованно) друг от друга, поэтому результирующая волна представляет собой набор волновых цугов с хаотически меняющейся фазой. Естественно, что монохроматические волны от двух независимых источников тем более будут некогерентными.

**Опыт Юнга.** Явление интерференции света впервые объяснил на основе волновой теории английский ученый Томас Юнг в 1801 г. Он ввёл в науку термин «интерференция» в 1803 г.

В 1802 г. Юнг выполнил первый демонстрационный эксперимент по наблюдению интерференции света (классический опыт Юнга), получив два когерентных источника.

Он пропустил свет в тёмную комнату через узкое отверстие  $S$  в ставне (рис. 26). Затем с помощью двух отверстий  $S_1$  и  $S_2$  на экране  $\mathcal{E}_1$  разделил поток света на два. Эти два потока света, накладываясь друг на друга, образовали в центре экрана  $\mathcal{E}_2$  белую полосу, а по краям – радужные.

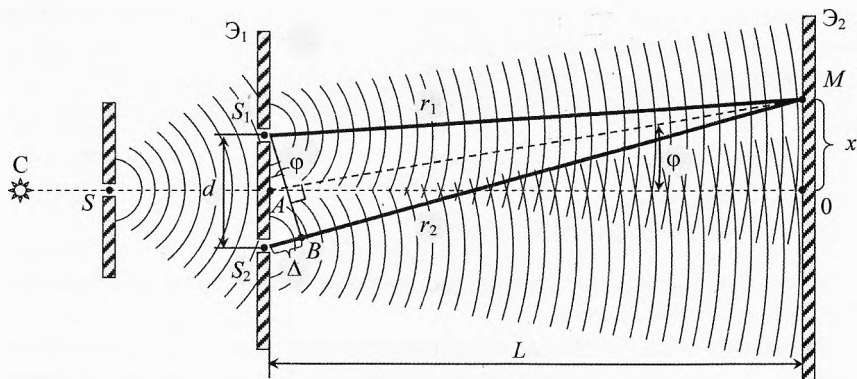


Рис. 26. Опыт Юнга

Интерференционная картина получилась за счёт деления фронта волны, идущего от источника, на две части при прохождении через два близкорас-

положенных отверстия. Реально получилась интерференция двух дифрагирующих пучков света.

Если бы не было явления дифракции (огибание волнами препятствий, о котором речь пойдет в следующем параграфе), то свет, пройдя через узкую щель в ставне, отразился бы от центральной части первого экрана Э<sub>1</sub>. Но поскольку интерференционная картина в опыте Юнга наблюдается, значит, для света, как и для механических волн, имеет место и дифракция, и интерференция.

В 1803 г. Юнг усовершенствовал свой опыт и измерил длины волн света разных цветов. В частности, для красного цвета он получил  $\lambda_k = 0,7$  мкм, а для фиолетового –  $\lambda_{\phi} = 0,42$  мкм.

В том же году он предпринял попытку объяснить дифракцию света от тонкой нити, связывая её с интерференцией. Юнг открыл интерференцию ультрафиолетовых лучей.

Юнг показал, что при отражении света от более плотной среды происходит потеря полуволны.

Томас Юнг с ранних лет обладал необыкновенными способностями и феноменальной памятью. В 2 года он научился бегло читать, в 4 знал на память много сочинений английских поэтов, в 8–9 лет овладел токарным ремеслом и мастерил различные физические приборы, к 14 годам познакомился с дифференциальным исчислением (по Ньютону), изучил много языков (греческий, латынь, французский, итальянский, арабский и др.). Учился в Лондонском, Эдинбургском и Геттингенском университетах, где сначала изучал медицину, но потом увлекся физикой, в частности оптикой и акустикой. В 1801–1803 годах – профессор Королевского университета, с 1811 года – врач в больнице Святого Георгия в Лондоне, одновременно с 1818 года – секретарь Бюро долгов, руководил изданием «Морского календаря». В последние годы жизни занимался составлением египетского словаря. В истории науки он известен в основном как физик.



Томас Юнг  
(1773–1829)

Найдём разность хода  $\Delta$  между двумя лучами света, приходящими на экран в точку  $M$ , находящуюся на расстоянии  $x$  от центра экрана (рис. 26):

$$\Delta = r_2 - r_1.$$

Поскольку расстояние между отверстиями  $S_1$  и  $S_2$  пренебрежимо мало по сравнению с расстоянием между экранами, то из треугольника  $\Delta S_1 S_2 B$  получим, что разность хода лучей равна:

$$\Delta \approx d \cdot \sin \varphi. \quad (4)$$

Из треугольника  $\Delta AOM$  получим, что:

$$x \approx L \cdot \sin \varphi. \quad (5)$$

Сравнивая (4) и (5), получим:

$$\Delta \approx \frac{d \cdot x}{L}. \quad (6)$$

Интенсивность света длиной волны  $\lambda$  в точке  $M$  будет максимальной, если разность хода двух волн будет кратна целому числу волн (то есть чётному числу полуволн):

$$\Delta_{\max} \approx k \cdot \lambda$$

Подставляя это выражение в (6), найдём расстояния от точки  $O$ , где интенсивность будет максимальна:

$$x_{\max} \approx \frac{k \cdot \lambda \cdot L}{d}, \quad (7)$$

где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  – целое число.

При этом угол отклонения от направления на точку  $O$ :

$$\sin \varphi_{\max} \approx \frac{k \cdot \lambda}{d}$$

Аналогично интенсивность света будет минимальна, если разность хода двух волн будет составлять нечётное число полуволн:

$$\Delta_{\min} \approx (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

Подставляя это выражение в (6), найдём расстояния от точки  $O$ , где интенсивность будет минимальна:

$$x_{\min} \approx (2k + 1) \cdot \frac{\lambda \cdot L}{2d}, \quad \text{где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ – целое число.}$$

При этом угол отклонения от направления на точку  $O$ :

$$\sin \varphi_{\min} \approx (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2d}$$

✎ **Пример 7.** В опыте Юнга по интерференции света расстояние между щелями  $d = 0,7$  мм, а расстояние от двойной щели до экрана  $L = 2$  м. При освещении прибора красным светом расстояние между соседними светлыми полосами оказалось равным  $\Delta x = 2$  мм. Определить по этим данным длину световой волны.

→ **Решение.** Запишем формулу (7) для соседних максимумов:

$$x_k = \frac{k \cdot \lambda \cdot L}{d}, \quad x_{k+1} = \frac{(k+1) \cdot \lambda \cdot L}{d}.$$

Тогда расстояние между соседними светлыми полосами равно:

$$\Delta x = \frac{\lambda \cdot L}{d}.$$

Значит, длина волны была равна:

$$\lambda = \frac{\Delta x \cdot d}{L}, \quad \lambda = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,7 \cdot 10^{-3}}{2} = 0,7 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 700 \text{ нм}.$$

Именно таким образом Томас Юнг первым измерил длину световой волны. ←

✓ **Ответ.** Длина световой волны равна  $\lambda = 700 \text{ нм}$ .

**Примечание.** Расстояние между соседними тёмными полосами будет вычисляться по такой же формуле. Проверьте.

**Цвета тонких плёнок.** В отроческом возрасте наш класс путешествовал по Северному Кавказу на двух крытых тентах грузовиках. Одним из самых ярких моих впечатлений в поездке было быстрое течение реки Сунжа в г. Грозном и то, что на поверхности воды наблюдались участки, переливающиеся разными цветами. Оказывается, это были тонкие плёнки продуктов переработки нефти. В своё время о мыльной плёнке очень художественно писал Марк Твен: «Мыльный пузырь, витая в воздухе, зажигается всеми оттенками цветов, присущими окружающим предметам. Мыльный пузырь, пожалуй, самое изысканное чудо природы».

Томас Юнг первым догадался, что цвета тонких плёнок можно объяснить интерференцией пучков света, отражающихся от внешней и внутренней поверхности плёнки.

Рассмотрим луч от источника  $S$ , падающий на бензиновую плёнку на воде в точку  $A$  (рис. 27). Луч частично отражается и идёт в глаз наблюдателя, а частично преломляется в точке  $A$ , проходит сквозь бензин, частично отражается в точке  $B$ , снова проходит толщу бензина и после преломления на границе бензин–воздух в точке  $C$  тоже идёт в глаз наблюдателя.

Разность хода лучей 1 и 2 обусловлена длиной путей  $AD$  и  $AB + BC$ , а также показателем преломления плёнки. Кроме этого, на границе воздух–бензин свет отражает от более плотной среды, поэтому луч 1 теряет половину длины волны. Итак, волна луча 2 отстаёт от волны луча 1 на  $\Delta$ :

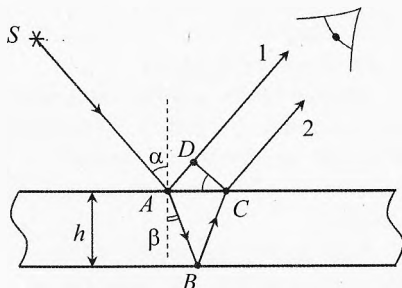


Рис. 27. Цвета тонких плёнок

$$\Delta = (AB + BC)n - (AD + \lambda/2).$$

Поскольку  $AB = BC = \frac{h}{\cos \beta}$ ,  $AD = AC \cdot \sin \alpha$ ,  $AC = 2h \cdot \operatorname{tg} \beta$ ,  $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$ ,  
 $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$ ,  $\sin \alpha = n \cdot \sin \beta$ , то после преобразований получим:

$$\Delta = 2h \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2}.$$

В зависимости от толщины, показателя преломления плёнки, а также от угла, под которым наблюдается картина, условия максимума интерференционной картины будут наблюдаться только для волн определённой частоты света (для узкого участка спектра, то есть для определённого цвета). Если же толщина плёнки переменная, то можно будет наблюдать в отражённом свете все цвета радуги. Плёнка должна быть достаточно тонкой, чтобы наблюдалось сложение от одного волнового цуга.

**Кольца Ньютона.** Простую интерференционную картину наблюдал И. Ньютон в тонкой прослойке воздуха между стеклянной пластинкой и положенной на неё плосковыпуклой линзой большого радиуса кривизны. При освещении белым светом интерференционная картина состоит из тёмного пятна по центру и концентрических цветовых колец вокруг него (рис. 28).

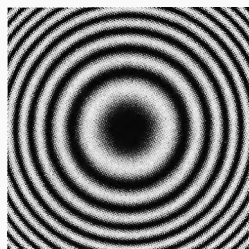


Рис. 28. Кольца Ньютона

Если прибор освещается монохроматическим светом, то кольца будут только данного цвета, причём на тех же местах, где были при освещении белым светом, а между ними будет темнота.

Ньютон не смог объяснить, почему возникают «кольца Ньютона». Это удалось Юнгу в 1810 г. следующим образом.

Пусть свет падает на плоскую поверхность линзы (рис. 29). Частично световая волна отражается от поверхности, но мы не будем её рассматривать.

Другая часть волны, преломляясь, проходит в линзу, частично отражается от сферической поверхности линзы и, ещё раз преломившись, выходит вверх из линзы (волна 1).

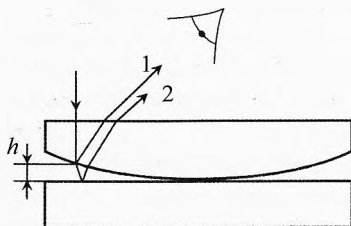


Рис. 29. Кольца Ньютона

Ещё часть падающей волны проходит сквозь линзу, проходит воздушный промежуток, отражается от поверхности плоской пластинки. Затем вновь проходит через воздух и линзу и выходит из линзы вверх в виде ослабленной волны 2, которая когерентна волне 1.

При небольшой высоте воздушного промежутка между линзой и пластинкой волны 1 и 2 будут из одного цуга волн, поэтому они создадут ин-

терференционную картину. Если амплитуды волн 1 и 2 будут одного порядка, то видность интерференционной картины будет хорошей.

Разность хода двух волн определяется двойной длиной воздушного промежутка, который необходимо пройти второй волне. Кроме этого эти две волны отражаются от разных границ раздела двух сред. Первая волна отражается от границы стекло–воздух без потери половины длины волны. Вторая волна отражается от более плотной среды (на границе воздух–стекло), поэтому теряет половину длины волны, то есть разность хода увеличивается на  $\lambda/2$ .

В месте касания линзы и пластины толщина воздушного промежутка близка к нулю, но из-за потери полуволны при отражении от плотной среды вторая волна находится в противофазе с первой волной, поэтому в центре интерференционной картины волны гасят друг друга и наблюдается тёмное пятно (разность хода в центре примерно равна  $\lambda/2$ ).

**Расчёт тёмных и светлых колец Ньютона.** Пусть между пластиной и линзой находится воздух. Пусть первая часть волны отражается от границы линза–воздух. Отражение здесь происходит от менее плотной среды, то есть без потери полуволны.

Вторая часть волны отражается на границе воздух–стекло от более плотной среды, поэтому вторая волна теряет половину волны. Кроме этого она проходит путь, равный двойной толщине воздушного промежутка. То есть вторая волна отстаёт от первой на:

$$\Delta = 2h + \frac{\lambda}{2}. \quad (8)$$

Для тёмных колец разность хода должна составлять нечётное количество полуволн:

$$\Delta = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2}, \text{ где } k=0, 1, 2 \text{ и т.д.}$$

Значит, высота воздушного промежутка для очередного тёмного кольца равна:

$$2h_k + \frac{\lambda}{2} = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2} \Rightarrow h_k = k \cdot \frac{\lambda}{2}. \quad (9)$$

Из толщины прослойки между линзой и пластиной найдём радиус  $r$  очередного тёмного кольца по теореме Пифагора (рис. 30):

$$R^2 = r^2 + (R-h)^2 \Rightarrow r^2 = 2Rh - h^2.$$

Учитывая, что  $R \gg h$ , получим, что:

$$r^2 \approx 2Rh. \quad (10)$$

Подставляя  $h_k$  из (9), получим радиусы тёмных колец:

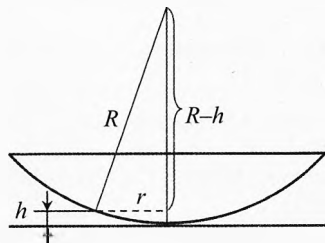


Рис. 30. Расчёт колец Ньютона

$$r_k = \sqrt{2Rh_k} = \sqrt{2R \cdot k \cdot \frac{\lambda}{2}} \Rightarrow r_k = \sqrt{k \cdot R \cdot \lambda}.$$

Если между линзой и пластинкой находится жидкость с показателем преломления  $n$  (а не воздух), то **радиусы тёмных пятен** уменьшаются, т.к. длина волны в жидкости:

$$\lambda_{\text{ж}} = \frac{\lambda}{n} \Rightarrow r_k = \sqrt{\frac{k \cdot R \cdot \lambda}{n}}, \text{ где } k=0, 1, 2 \text{ и т.д.}$$

Для светлых колец разность хода должна составлять чётное количество полуволн, то есть целое количество волн:

$$\Delta = k \cdot \lambda.$$

Подставляя  $\Delta$  из (8), получим:

$$2h_k + \frac{\lambda}{2} = k \cdot \lambda \Rightarrow h_k = \left(k - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\lambda}{2}, \text{ где } k=1, 2, 3 \text{ и т.д.}$$

Подставляя  $h_k$  в (10), получим радиусы светлых колец:

$$r_k = \sqrt{R \cdot \lambda \cdot \left(k - \frac{1}{2}\right)}.$$

Аналогично, если между линзой и пластинкой находится жидкость с показателем преломления  $n$ , то **радиусы светлых колец**:

$$r_k = \sqrt{\frac{R \cdot \lambda}{n} \cdot \left(k - \frac{1}{2}\right)}, \text{ где } k=1, 2, 3 \text{ и т.д.}$$

Заметим, что для тёмных колец  $k$  начинается с 0. В центре при  $h=0$  получается тёмное пятно:  $r_0=0$ . За ним идёт первое светлое кольцо при  $k=1$ :

$r_1 = \sqrt{\frac{R \cdot \lambda}{2}}$ . Затем идёт первое тёмное пятно при  $k=1$ :  $r_1 = \sqrt{R \cdot \lambda}$  и т.д.

✎ **Пример 8.** Радиус фиолетового ( $\lambda = 0,42$  мкм) кольца первого порядка в приборе по наблюдению колец Ньютона равен  $r_1 = 10$  мм. Между линзой и стеклом находится воздух. Оценить радиус кривизны линзы.

➡ **Решение.** Из соотношения  $r_k = \sqrt{\frac{R \cdot \lambda}{n} \cdot \left(k - \frac{1}{2}\right)}$  для первого светлого кольца получим:  $r_1 = \sqrt{\frac{R \cdot \lambda}{2}} \Rightarrow R = \frac{2r_1^2}{\lambda} = 476 \text{ м.} \leftarrow$

✓ **Ответ.** Радиус кривизны линзы равен 476 м (почти полкилометра!).

**Просветлённая оптика.** Объективы фотоаппаратов и других оптических приборов состоят из нескольких линз, зеркал, призм и т.п. Число отражающих поверхностей достигает нескольких десятков. При каждом отраже-

нии теряется до 10% падающей энергии. В результате к наблюдателю доходит менее половины света.

Кроме того, многократное отражение от преломляющих поверхностей вызывает появление внутри объектива рассеянного света, что ухудшает качество изображений. На изображении появляется «вуаль».

Для увеличения доли светового потока через объектив применяют просветление оптики, используя явление интерференции. На поверхность линз, граничащих с воздухом, наносят тончайшую плёнку (или нескольких плёнок одна поверх другой), показатель преломления которой меньше показателя преломления стёкол линз.

Свет отражается от передней и задней границ плёнки в обоих случаях от более плотной среды. Поэтому при обоих отражениях происходит потеря полуволны. Но свет, отражённый от дальней границы, дополнительно проходит двойную толщину плёнки:

$$\Delta = 2d.$$

При углах падения, близких к нормальному, эффект просветления максимален, если толщина тонкой плёнки равна нечётному числу четвертей длины световой волны в материале плёнки:

$$d = \frac{\lambda_{пл}}{4}, \quad d = \frac{3\lambda_{пл}}{4}, \quad d = \frac{5\lambda_{пл}}{4} \text{ и т.д.}$$

где  $\lambda_{пл} = \frac{\lambda}{n}$  — длина световой волны в плёнке,  $n$  — показатель преломления плёнки.

В этом случае в результате интерференции света, отражаемого от передних и задних границ просветляющих плёнок, происходит взаимное «гашение» отражённых световых волн и, следовательно, усиление интенсивности проходящего света (большая доля света проходит через объектив):

$$\Delta = \frac{\lambda_{пл}}{2}, \quad \Delta = \frac{3}{2}\lambda_{пл}, \quad \Delta = \frac{5}{2}\lambda_{пл} \text{ и т.д.}$$

Таким образом, просветляющие плёнки уменьшают светорассеяние и отражение падающего света от поверхности оптического элемента, соответственно улучшая светопропускание системы и контраст оптического изображения.

Изменяя толщину просветляющей плёнки, можно сместить минимум отражения в различные участки спектра. Покрытия с минимальным отражением в зеленой области ( $\lambda = 555$  нм, область наибольшей чувствительности человеческого глаза) наносят на объективы, применяемые в черно-белой фотографии; в отражённом свете их поверхности имеют пурпурный оттенок (т.н. голубая оптика). В просветлённых объективах для цветной фотографии отражение минимально в голубой области спектра; оттенок их поверхностей янтарный.



Для более эффективного гашения отражённого света на всём видимом диапазоне применяется многослойное просветляющее покрытие, представляющее собой последовательность чередующихся слоев (их число достигает 15 и более) из двух (или более) материалов с различными показателями преломления.

Просветлённый объектив требует бережного обращения, так как плёнки, нанесённые на поверхность линз, легко повредить. Кроме того, тончайшие плёнки загрязнений (жир, масло) на поверхности просветляющего покрытия нарушают его работу и резко увеличивают отражение света от загрязненной поверхности. По методике нанесения и составу просветляющего покрытия просветление бывает физическим (напыление) и химическим (травление).

✂ **Пример 9.** Вычислить минимальную толщину просветляющей плёнки для зеленого цвета (550 нм). Показатель преломления плёнки  $n = 1,3$ .

→ **Решение.** 
$$d = \frac{\lambda_{пл}}{4} = \frac{\lambda}{4n} = \frac{550 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 1,3} = 0,1 \text{ мкм.}$$

Это очень тонкая плёнка, составляющая всего несколько сотен атомных слоев. На самом деле наносят слой, кратный нечётному числу четвертей длины волны. ⇐

✓ **Ответ.** Минимальная толщина просветляющей плёнки для зеленого цвета равна  $d = 0,1 \text{ мкм}$ .

✂ **Пример 10.** Вычислить минимальное число слоев молекул бензина в плёнке на поверхности воды, чтобы она выглядела в фиолетовом цвете (400 нм). Принять бензин состоящим из октана ( $C_8H_{18}$ ). Показатель преломления бензина  $n_б = 1,4$ , воды  $n_в = 1,3$ . Плотность бензина  $\rho = 700 \text{ кг/м}^3$ .

→ **Решение.** В отражённом свете мы видим результат интерференции двух волн: часть света отражается от верхней поверхности бензиновой плёнки, часть – от нижней её поверхности (а часть проходит через плёнку в воду).

При отражении света на границе воздух–бензин происходит потеря половины длины волны (то есть фаза волны уменьшается на  $\pi$ ), т.к. свет отражается от оптически более плотной среды.

При отражении света от нижней границы плёнки (бензин–вода) потери полуволны не происходит, так как показатель преломления воды меньше, чем у бензина. Однако эта часть волны проходит путь больший на двойную толщину бензиновой плёнки. Итак,

$$\Delta = 2h - \frac{\lambda_б}{2},$$

где  $\lambda_6 = \frac{\lambda}{n_6}$  – длина волны фиолетового цвета в плёнке.

В задаче требуется сделать не просветляющую плёнку, которая уменьшает отражение, а наоборот, требуется максимальное отражение света на определённой частоте. Поэтому условие максимума интерференции двух волн, отражённых от разных границ плёнки:

$$\Delta = k \cdot \lambda_6,$$

Из всех трёх уравнений получим:

$$k \cdot \lambda_6 = 2h - \frac{\lambda_6}{2} \Rightarrow h = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\lambda}{2n_6}.$$

Тогда минимальная толщина плёнки (при  $k = 0$ ):

$$h_{\min} = \frac{\lambda}{4n_6} = \frac{400 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 1,4} = 71 \text{ нм}.$$

Оценим диаметр молекулы бензина через объем  $V_0$ , занимаемый одной молекулой:

$$d_0 = \sqrt[3]{V_0} = \sqrt[3]{\frac{V}{N}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}},$$

где  $n = \frac{\rho}{m_0}$  – концентрация молекул бензина,  $m_0 = \frac{M}{N_A}$  – масса одной молекулы бензина,  $M = 12 \cdot 8 + 1 \cdot 18 = 114 \text{ г/моль} = 0,114 \text{ кг/моль}$  – молярная масса бензина. Тогда:

$$d_0 = \sqrt[3]{\frac{M}{\rho \cdot N_A}} = \sqrt[3]{\frac{0,114}{700 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}} = 6,5 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Значит, минимальное количество слоев бензина:

$$Z = \frac{h_{\min}}{d_0} = \frac{71 \cdot 10^{-9}}{6,5 \cdot 10^{-10}} = 110.$$

✓ **Ответ.** Минимальная толщина бензиновой плёнки, которая в отражённом свете выглядит фиолетовой, составляет около 100 слоев молекул бензина.

## § 21. Дифракция волн. Теория зон Френеля

Волны, распространяясь, встречают различные препятствия. Они огибают края препятствий (рис. 31а). Если размер препятствия мал по сравнению с длиной волны, то волна огибает препятствие, смыкаясь за ним. Если препятствие большое, а волна может проходить только через узкое отверстие, то, пройдя её, она распространяется как сферическая волна (рис. 31б).

**Дифракция** (от лат. *diffRACTus* – буквально разломанный, переломанный) – огибание волнами препятствий.

Термин «дифракция» ввёл итальянский ученый (священник) Франческо Гримальди. Его основное сочинение – «Физическая наука о свете, цветах и радуге». В нём Гримальди подробно описал явление распространения света: отражение, преломление, дифракцию (размытость тени от предмета).

Под дифракцией понимается как нарушение прямолинейности распространения волн, так и сопровождающие его интерференционные явления. Дифракционная картина существенно зависит от соотношения между размерами препятствия или отверстия и длиной волны. Дифракция присуща волнам любой природы. На рис. 32 представлены дифракционные картины от различных препятствий: а) тонкой проволоки; б) круглого отверстия; в) круглого непрозрачного экрана.

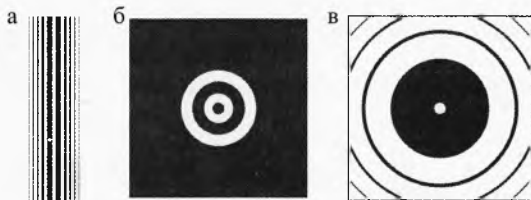


Рис. 32. Дифракционные картины от различных препятствий

Дифракцию волн, в том числе света, объяснил французский физик Френель. Он дополнил **принцип Гюйгенса** (каждая точка, до которой дошло колебание, становится источником вторичных когерентных волн) следующим положением.

Амплитуда колебаний, создаваемая вторичными источниками, зависит от угла  $\alpha$  между направлением луча (нормали к фронту) первичной волны и направлением на точку, в которой рассматриваются колебания.

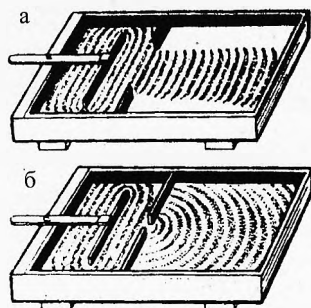


Рис. 31. Дифракция волн



Франческо Мария Гримальди (1618–1663)



Огюстен Жан Френель (1788–1827)

В 1818 г. Френель представил свой «Мемуар о дифракции света» на конкурс французской академии наук, посвящённый объяснению интерференции и дифракции. В этой работе он объяснил явления интерференции и



Можно вычислить площадь каждой зоны Френеля и убедиться, что они одинаковы. Значит, полная интенсивность волны от каждой зоны в пространство будет уходить одна и та же.

Изобразим вектор амплитуды  $\vec{A}_1$  колебаний, приходящих в точку  $O$  от первой зоны (рис. 34). Для этого разобьем первую зону на несколько равных по площади подзон. Пусть амплитуда, создаваемая начальной подзоной первой зоны в точке  $O$ , будет равна  $\vec{a}_{11}$ , а второй подзоны первой зоны –  $\vec{a}_{12}$ . Амплитуды от всех подзон первой зоны будут практически одинаковы (чуть-чуть уменьшаясь), а разность по фазе будет нарастать. Амплитуда  $\vec{a}_{1n}$  последней подзоны первой зоны будет отставать от амплитуды первой подзоны на  $180^\circ$  в связи с разностью хода на  $\frac{\lambda}{2}$  до точки  $O$  от разных краев зоны.

Аналогично первой можно построить амплитуду  $\vec{A}_2$  от второй зоны. Она будет чуть меньше по модулю, чем у первой зоны, но по фазе противоположна ей (рис. 35).

Аналогично, построив амплитуды от всех зон, получим картину (рис. 36), из которой видно, что при отсутствии ограничивающего экрана результирующая амплитуда колебаний в точке  $O$  равна половине амплитуды первой зоны:

$$\vec{A} = \frac{\vec{A}_1}{2}.$$

Если закрыть тёмной ширмой все зоны, кроме первой, то амплитуда колебания в точке  $O$  будет вдвое больше, чем при отсутствии ширмы (а интенсивность – вчетверо больше). Ещё более удивительная картина получается, если открытыми оставить только две первые зоны. Амплитуда  $A_{12} = (A_1 - A_2) \approx 0$  будет равна разности амплитуд первой и второй зоны и практически будет равна нулю, так как амплитуды этих двух зон складываются, будучи в противофазе. Свет первой зоны, складываясь со светом второй зоны, даёт темноту, что и подтвердилось экспериментами.

Если с помощью ширмы оставить открытой одну треть первой зоны, то в точке  $O$  освещённость будет такая же, как при полностью открытом источнике. Если оставить открытыми только чётные (или только нечётные) зоны, то освещённость в точке  $O$  возрастет многократно (как от собирающей линзы).

Не принявший сначала теорию Френеля Пуассон заметил, что при некоторых условиях, когда на пути света от точечного источника установлен непрозрачный шар, в центре геометрической тени наблюдается светлое пятно (когда закрыта только первая



Симеон Дени Пуассон  
(1781–1840)

зона Френеля или небольшое нечётное количество первых зон). Поставленный Д. Ф. Араго эксперимент подтвердил правоту зонной теории Френеля.

*Светлую точку в центре геометрической тени часто называют **пятном Пуассона**.*

Чтобы любому ученику пронаблюдать пятно Пуассона, нужно взять шарик диаметром около 2 см, расположить его на расстоянии 10 м от точечного источника света, а по другую сторону поместить экран примерно на таком же расстоянии. Опыт можно провести вечером в школьном коридоре вместе с учителем.

## § 22. Дифракция света

**Два вида дифракции.** В зависимости от условий эксперимента различают два вида дифракционных явлений: дифракцию в сходящихся лучах (дифракция Френеля) и дифракцию в параллельных лучах (дифракция Фраунгофера).

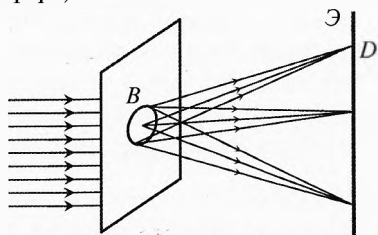


Рис. 37. Дифракция Френеля

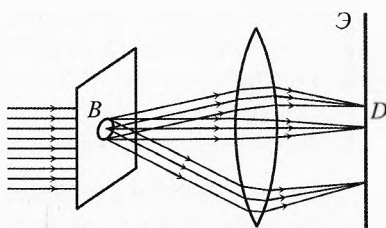


Рис. 38. Дифракция Фраунгофера

О дифракции Френеля речь идёт при отсутствии оптических приборов между отверстием, на котором происходит дифракция, и местом наблюдения (экраном). Результирующая картина на экране в любой его точке определяется как результат интерференции волн, пришедших в неё от всех вторичных источников, расположенных в отверстии (рис. 37).

Другой вариант дифракции (в параллельных лучах, дифракция Фраунгофера) наблюдается при использовании оптического прибора (линзы, глаза), собирающего в одну точку все параллельные лучи. Например, между отверстием *B* устанавливают линзу так, чтобы экран находился в её фокальной плоскости (рис. 38). В результате дифракции свет от каждого параллельного пучка собирается в одной точке экрана. В этой точке происходит интерференция пришедших волн. Результат интерференции зависит от разности фаз интерферирующих волн. В случае круглого отверстия дифракционная картина состоит из центрального светлого пятна и чередующихся тёмных и светлых колец.

Хотя принципиально дифракция Фраунгофера не отличается от дифракции Френеля, но практически именно этот случай важен, так как именно дифракция Фраунгофера используется во многих дифракционных приборах.

**Дифракция от круглого отверстия.** Большинство оптических приборов, в том числе и глаз, принимают падающий на них поток света через круглое отверстие.

Рассчитаем угловой радиус центрального светлого пятна при наблюдении дифракции Фраунгофера от отверстия радиуса  $R$ , освещаемого монохроматическим светом длиной волны  $\lambda$ . Пусть на отверстие нормально падает свет в одинаковой фазе во всех точках отверстия (рис. 39).

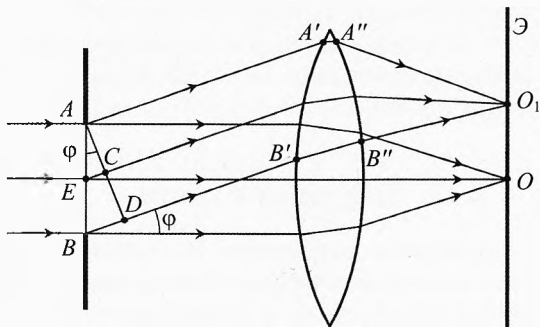


Рис. 39. Дифракция от круглого отверстия

*Линза обладает замечательным свойством: на пути от любой плоскости (например,  $ACD$ ), перпендикулярной направлению распространения света, до фокуса, где свет от параллельных лучей собирается в точку  $O_1$ , разность хода световых волн (лучей) остается неизменной.*

То есть какая была разность хода в точках  $A$  и  $D$  до линзы, такой она останется у этих лучей в точке  $O_1$ , где они сходятся. Значит, разность фаз на пути  $AA'A''O_1$  и  $DB'B''O_1$  одинакова.

Поскольку во всех точках отверстия  $AEB$  колебания происходят синфазно по условию, то в главный фокус (точка  $O$ ) все лучи приходят в одинаковой фазе, и там наблюдается максимум освещённости.

Свет, проходя через отверстие, дифрагирует по всевозможным направлениям. Пусть параллельные лучи, отклонившиеся на угол  $\varphi$ , собираются линзой в точке  $O_1$ . Вычислим разность хода волн, идущих от центра отверстия  $E$  и от его краев  $A$  (или  $B$ ). Как видно из рисунка, эта разность хода равна:

$$EC = AE \cdot \sin \varphi = R \cdot \sin \varphi.$$

Можно принять, что граница центрального светлого пятна или, точнее, положение первого тёмного кольца, будет в направлении, где разность хода лучей от точек  $A$  и  $E$  составляет половину длины волны:

$$R \cdot \sin \varphi_1 = \frac{\lambda}{2}, \quad \text{или} \quad \sin \varphi_1 = \frac{\lambda}{2R} = \frac{\lambda}{D},$$

где  $D = 2R$  – диаметр отверстия. Поскольку  $\sin \varphi_1 \ll 1$ , то угловой радиус первого светлого пятна:

$$\varphi_1 \approx \frac{\lambda}{D}$$

Это пятно окружено системой concentрических тёмных и светлых колец значительно меньшей интенсивности света, чем центральное пятно.

Из последнего уравнения следует, что угловой радиус колец  $\varphi$  тем больше, чем меньше диаметр отверстия. Он также зависит прямо пропорционально от длины волны  $\lambda$ .

Если отверстие освещается белым светом, то центральное пятно будет белым, а вокруг его будут окружать цветные кольца, начиная с фиолетового (наименьшая длина волны). Радиус первого красного кольца ( $\lambda_k \approx 0,76$  мкм) почти в два раза больше радиуса первого фиолетового кольца ( $\lambda_\phi \approx 0,4$  мкм).

✎ **Пример 11.** Пусть на отверстие диаметром  $D = 1$  мм нормально падает параллельный пучок света фиолетового цвета длиной волны  $\lambda = 0,4$  мкм. Вычислить угловой и линейный радиусы центрального светлого пятна, если фокусное расстояние линзы  $F = 10$  см.

➡ **Решение.** Экран устанавливается за линзой на фокусном расстоянии. Угловой радиус первого светлого пятна:

$$\varphi = \frac{\lambda}{D}, \quad \varphi = \frac{0,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}}{10^{-3} \text{ м}} = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 0,4 \cdot 10^{-3} \cdot 57,3 \cdot 60' = 1,4'.$$

Линейный радиус пятна:

$$r = F\varphi, \quad r = 100 \text{ мм} \cdot 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 0,04 \text{ мм}. \quad \leftarrow$$

✓ **Ответ.** Угловой радиус центрального светлого фиолетового пятна равен  $1,4$  угловой минуты, а линейный диаметр  $0,08$  мм, это чуть меньше толщины лезвия бритвы. Заметим, что диаметр светлого пятна в  $13$  раз меньше диаметра отверстия, в которое попадает свет. Если бы не было явления дифракции, то изображение отверстия на фокусном расстоянии от линзы было бы точечным.

## § 23. Дифракция и разрешающая способность оптических приборов. Острота зрения

Выражение  $\varphi = \frac{\lambda}{D}$  позволяет оценивать теоретический предел разрешающей способности оптических приборов, обусловленный явлением дифракции. Рассмотрим несколько примеров.

**Разрешающая способность человеческого глаза.** Диаметр зрачка стандартного глаза человека изменяется от  $2$  мм при ярком освещении до  $8$  мм в темноте.



Вычислим угловой радиус светлого пятна на сетчатке глаза от далекой звезды, светящей юноше в тёмную ночь. Примем длину волны  $\lambda = 0,56 \text{ мкм}$ .

$$\varphi = \frac{\lambda}{D}, \quad \varphi = \frac{0,56 \cdot 10^{-6} \text{ м}}{8 \cdot 10^{-3} \text{ м}} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ рад} = 0,24'.$$

Поскольку сетчатка находится на расстоянии  $F = 17 \text{ мм}$  от оптического центра глаза, то радиус первого дифракционного пятна (изображения звезды на сетчатке):

$$r = F \cdot \varphi, \quad r = 17 \text{ мм} \cdot 7 \cdot 10^{-5} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ мм} = 1,2 \text{ мкм}.$$

При ярком освещении диаметр зрачка становится в 4 раза меньше, поэтому разрешающая способность глаза ухудшится в 4 раза и угловой радиус светлого пятна на сетчатке будет примерно равен  $1'$ .

Два ярких светящихся точечных источника будет видно совершенно раздельно (пятна не будут перекрываться совсем), если угловое расстояние между ними  $\Delta\varphi = 2\varphi = 2'$ .

Согласно Рэлею, изображения двух точек одинаковой яркости ещё можно видеть раздельно, если центр дифракционного пятна каждого из них пересекается краем 1-го тёмного кольца другого (рис. 40). При этом наименьшая освещённость между изображениями разрешаемых точек составит 74% своего максимального значения, а разрешающая способность (угловое расстояние между центрами дифракционных пятен) составит  $\Delta\varphi = 1'$ .

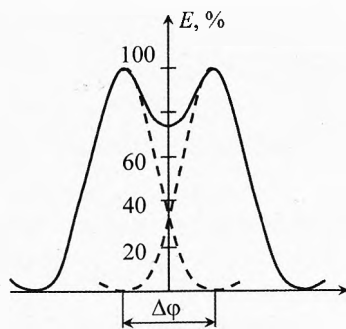


Рис. 40. Критерий Рэлея

**Острота зрения.** Качество зрения у людей отличается в широких пределах. Для оценки чёткости зрительных образов вводится скалярная безразмерная величина – острота зрения.

**Острота зрения** – скалярная величина, характеризующая способность глаза воспринимать раздельно две точки, расположенные друг от друга на определённом расстоянии. Острота зрения равна величине, обратной разрешающей способности глаза человека, выраженной в угловых минутах.

Остроту зрения обозначим буквой  $V$ , а разрешающую способность одного глаза, выраженную в угловых минутах, обозначим  $\Delta\varphi$ .

Тогда острота зрения:

$$V = \frac{1}{\Delta\varphi}. \quad (11)$$

По таблице Сивцева (с буквами разного размера) Вы можете проверить свою остроту зрения, а затем выполнить лабораторную работу по определе-

нию остроты зрения: левого глаза, правого глаза, двух глаз одновременно. Если носите очки, то проверьте остроту зрения в очках и без очков.

Для выполнения работы нужно начертить на белом листе бумаги ярко две тёмные линии на расстоянии 1–2 мм друг от друга (светлая прослойка между линиями должна быть шириной  $x = 1,0\text{--}2,0$  мм).

Прикрепите к стене этот лист бумаги и отходите от него на расстояние  $L$ , при котором различие между линиями будет на грани возможного. Вычислите угол  $\Delta\varphi = \frac{x}{L}$  в радианах и переведите в угловые минуты:

$$\Delta\varphi = \frac{x}{L} \cdot 57,3 \cdot 60'.$$

Наконец вычислите остроту зрения по формуле (11).

Сравните, когда Ваше зрение острее: если смотришь на объект глазом, у которого лучше острота зрения, или обоими сразу? Есть мнение медиков, что двумя глазами видно лучше, поскольку более слабый глаз всё-таки помогает лучше видеть.

Жизнь – это борьба за существование. А чем лучше видишь опасности, тем легче бороться. Зрение даёт около 90% информации человеку об окружающем мире. Естественно, что два даже разных по качеству зрения глаза должны видеть лучше, чем один.

Обратим внимание на то, что человек, глядя ночью на небо, видит все звёзды одинакового размера, равного диаметру светлого дифракционного пятна. Только одни из них светятся ярче, а другие – слабее. Самые яркие звёзды воспринимаются цветными.

Если бы не было явления дифракции, то звёзды выглядели бы значительно меньшими и во много раз более яркими. Более подробно об этом постараемся написать в учебном пособии по олимпиадной астрономии.

**Разрешающая способность телескопа.** При фотографировании звёзд с помощью телескопа изображения светил на фотопластинке или ПЗС-матрице получаются не точечными, а примерно равными размеру центрального дифракционного пятна из-за дифракции на отверстии объектива. При этом не важно, рефлекторный или рефракторный телескоп. Важен диаметр отверстия объектива.

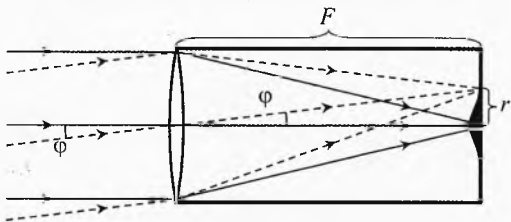


Рис. 41. Разрешающая способность телескопа

Угловой радиус первого светлого пятна:  $\varphi = \frac{\lambda}{D}$ .

Как видно из рисунка 41:  $\varphi = \frac{r}{F}$ .

Из этих двух формул получим радиус видимого изображения звезды:

$$r = \frac{\lambda \cdot F}{D}.$$

Из последнего выражения видно, что изображение звезды тем меньше (ближе к точечному), чем меньше длина волны спектра, в котором наблюдают звезду, и чем меньше отношение фокусного расстояния к диаметру объектива. Наименьший размер изображения дают телескопы с широким короткофокусным объективом.

✂ **Пример 12.** Оценим разрешающую способность школьного телескопа диаметром линзы объектива  $D_1 = 6$  см и самого крупного в России рефлекторного телескопа диаметром зеркала  $D = 6$  м, установленного в Карачаево-Черкесии. Длину волны возьмём равной  $\lambda = 0,54$  мкм.

→ **Решение.**  $\varphi_1 = \frac{0,54 \cdot 10^{-6} \text{ м}}{0,06 \text{ м}} = 9 \cdot 10^{-6} \text{ рад} = 1,86''.$

$\varphi_1 = \frac{0,54 \cdot 10^{-6} \text{ м}}{6 \text{ м}} = 9 \cdot 10^{-8} \text{ рад} = 0,0186''.$  ←

✓ **Ответ.** Школьный телескоп даёт разрешение 1,86 угловых секунд, что примерно в 7,5 раз зорче, чем при визуальном наблюдении человеком ночного неба. А самый лучший российский телескоп позволяет видеть зорче ещё в 100 раз.

**Разрешающая способность микроскопа.** Явление дифракции ограничивает и разрешающую способность микроскопа. Если изображения двух светящихся точек, построенных объективом микроскопа, становятся неразличимыми из-за перекрытия их дифракционных изображений, то с помощью окуляра их разделить невозможно.



Рис. 42. Разрешающая способность микроскопа

Угловой радиус центрального дифракционного пятна:

$$\varphi = \frac{\lambda}{D},$$

где  $D$  – диаметр объектива микроскопа.

Пусть расстояние от рассматриваемого предмета до оптического центра объектива равно  $d$  (рис. 42), тогда выражение для минимального расстояния  $h$  между двумя светящимися точками, на котором они могут быть видны отдельно при наблюдении в микроскоп:

$$h = \varphi \cdot d \quad \text{или} \quad h = \frac{\lambda \cdot d}{D}. \quad (12)$$

Отсюда видно, что расстояние между двумя различными точками  $A$  и  $B$ , будет тем меньше (а разрешающая способность микроскопа больше), чем ближе объект к линзе, чем больше диаметр объектива и чем меньше длина волн света  $\lambda$ .

Поскольку изображение должно быть действительным, то  $d > F$ . Значит, надо использовать возможно более короткофокусные линзы. Максимально возможный диаметр объектива равен  $D = 2R$ , где  $R$  – радиус кривизны первой линзы объектива микроскопа. Естественно, линза должна быть полушаровой. Для полушаровой линзы фокусное расстояние  $F = \frac{R}{n-1}$ ,  $n$  – показатель преломления стекла линзы относительно воздуха ( $n \approx 1,5$ ). Значит,

$$d > \frac{R}{n-1}. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), получим:

$$h = \frac{\lambda \cdot d}{D} = \frac{\lambda \cdot d}{2R} > \frac{\lambda \cdot R}{2R \cdot (n-1)} = \frac{\lambda}{2(n-1)} \approx \lambda.$$

Таким образом, минимальное расстояние между светящимися точками, при котором с помощью микроскопа их можно увидеть раздельно при оптимальной конструкции микроскопа, равно длине световой волны, то есть примерно 0,5 мкм. Если наблюдения проводить в ультрафиолетовом свете, то можно отдельно увидеть ещё более мелкие объекты, которые лучше фотографировать, так как ультрафиолетовый свет вреден для глаз, к тому же глаз его не видит.

## § 24. Дифракция на щелях

Важную роль в экспериментальной физике играют явления дифракции на щелях с параллельными краями. Рассмотрим сначала дифракцию в параллельных лучах на одной узкой щели. Пусть на щель, длина которой во много раз больше её ширины, падает световая волна с плоским фронтом. Поместим за щелью собирающую линзу, а за линзой в её фокальной плоскости – экран. Рассмотрим распределение освещённости на экране (рис. 43).

Пусть в произвольной точке  $A$  собирается пучок параллельных лучей, идущих под углом  $\varphi$  к направлению исходного пучка света. Во всех точках волновой поверхности, достигших щели, колебания совершаются синфазно. Но в точке  $A$  на экране волны от разных участков щели придут не с одинаковыми фазами, так как

оптические пути их различны. Поскольку линза не изменяет длины оптического пути, то разность хода света от точек  $B$  и  $C$  щели можно определить, опустив нормаль  $CD$  из точки  $C$  на выбранное направление распространения света, проходящего через точку  $B$ . Если разность хода  $BD = \lambda/2$ , то расстояние  $x = BC$  является шириной зоны Френеля.

Разобьем всю щель на зоны по ширине, равной зонам Френеля. Все зоны ориентированы относительно выбранного направления  $\phi$  одинаково, но колебания, приходящие от двух соседних зон в точку  $A$ , отличаются по фазе на  $\pi$ , имея разность хода  $\lambda/2$ . Поэтому, если на щели укладывается чётное число зон, то в точке  $A$  происходит полное взаимное гашение колебаний и освещённость в точке  $A$  равна нулю. Если же число зон нечётно, то колебания от одной из зон останутся непогашёнными и в точке  $A$  будет наблюдаться некоторая освещённость (локальный максимум освещённости).

Чем больше угол  $\phi$ , тем большее число зон Френеля помещается на щели, поскольку  $x$  уменьшается с возрастанием угла. Значит, уменьшается и площадь полосы ( $x \cdot L$ ), приходящаяся на каждую зону, и меньше приходит излучения в точку  $A$ . То есть с увеличением числа зон уменьшается локальный максимум освещённости в точке  $A$ .

На рисунке также представлено распределение интенсивности излучения на экране. Видно, что изображение щели состоит из центральной яркой полосы и нескольких (во много раз меньших по интенсивности) прилегающих с двух сторон полос.

**Дифракция от двух щелей** (это уже близко к дифракционной решётке – главному спектральному прибору). Рассмотрим дифракцию от двух щелей шириной  $a$ , разделённых непрозрачным промежутком шириной  $b$  (рис. 44). Пусть на плоскость с парой щелей падает нормально плоский фронт монохроматической волны. С помощью линзы соберём все дифракционные лучи света. Выберем на экране точку  $A$ , в которой сходятся два параллельных пучка, выходящих от обеих щелей под углом  $\phi$  к нормали. Определим, от чего зависит освещённость экрана в произвольной точке  $A$ .

Если угол  $\phi$  выбран так, что на щели чётное число зон, то освещённость в точке  $A$  от каждой щели (и от обеих щелей вместе) будет равна нулю. Если же угол  $\phi$  таков, что на щели укладывается нечётное число зон, то каждая из них в отдельности даст свет на экране в точке  $A$ , а каков будет результат от двух щелей?

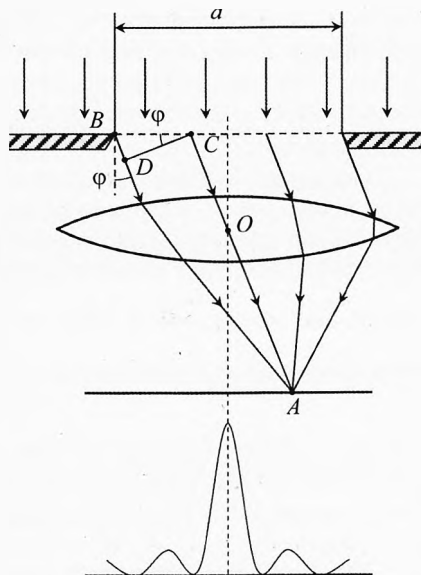


Рис. 43. Дифракция на щели

Назовем точки щелей *соответственными точками*, если они расположены на расстоянии  $d$ :

$$d = a + b.$$

Усиление света будет происходить тогда, когда разность хода  $\Delta = d \cdot \sin \varphi$  равна чётному числу полуволн (или целому числу длин волн):

$$\Delta = 2k \cdot \frac{\lambda}{2} = k \cdot \lambda.$$

Из последних трёх уравнений следует условие для главных максимумов освещённости интерференционной картины от двух щелей:

$$d \cdot \sin \varphi_{\max} = k \cdot \lambda.$$

Это соотношение для главных максимумов справедливо при любом количестве щелей.

В направлении, для которого разность хода от соответствующих точек щели равна нечётному числу полуволн, наблюдается интерференционный минимум на экране. Излучения, даваемые парой соседних щелей, будут гасить друг друга:

$$d \cdot \sin \varphi_{\min} = (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}.$$

Это выражение справедливо для любого чётного числа щелей. Оно называется направлением на дополнительные минимумы. Такое название обусловлено тем, что в случае одной щели или нечётного числа щелей в этих точках на экране будет свет. При большом количестве щелей даже при нечётном их числе в этих направлениях практически тоже будут минимумы.

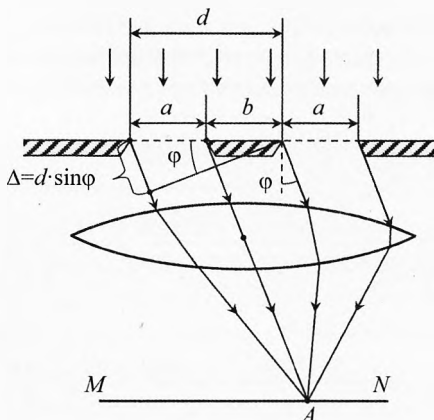


Рис. 44. Дифракция от двух щелей

## § 25. Дифракционная решётка

Гладкую пластину, на которой нанесён ряд тонких параллельных непрозрачных полос, называют дифракционной решёткой (рис. 45). Если пластина прозрачна, то дифракционный спектр наблюдается в проходящем через решётку свете. Если пластина непрозрачная, то дифракционный спектр наблюдается в отражённом свете (отражательная дифракционная решётка).

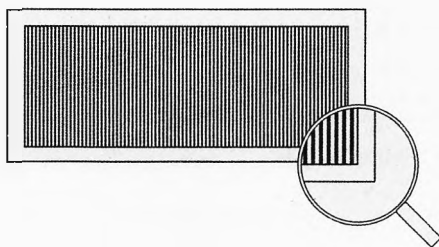


Рис. 45. Дифракционная решётка

Прозрачные полосы дифракционной решётки для наблюдателей в проходящем свете можно рассматривать, как щели. В отражательной дифрак-

ционной решётке интерференция происходит в отражённом свете от гладких полос.

Выражение для главных максимумов освещённости интерференционной картины справедливо для любого числа щелей:

$$d \cdot \sin \varphi_{\max} = k \cdot \lambda \quad \text{и} \quad d \cdot \sin \varphi_{\min} = (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}.$$

**Сумма ширин гладкой и негладкой (непрозрачной) полос называется постоянной решётки или периодом решётки и измеряется в единицах длины:**

$$d = a + b.$$

Термин «период» применяется в том смысле, что речь идёт о пространственной повторяемости (периодичности полос).

Чем меньше период решётки и чем больше общее число полос, тем больше становится дополнительных минимумов, увеличивается число дополнительных максимумов и уменьшается интенсивность света в них до исчезающе малого фона. А энергия световых колебаний в главных максимумах возрастает пропорционально квадрату числа щелей.

Максимумы света на экране располагаются симметрично от центрального максимума, для которого  $k = 0$ . Максимумам присваиваются номера, соответствующие значениям  $k$  (для максимума первого порядка  $k = 1$ , для максимума второго порядка  $k = 2$  и т.д.). При освещении белым светом центральный максимум будет белым, а слева и справа от него расположатся цветные спектры, причём ближе к центральному будет максимум первого порядка для фиолетового цвета в соответствии с выражением для главных максимумов, так как у фиолетового цвета минимальная длина волны.

**Пример 13.** Период школьной дифракционной решётки  $d = 0,01$  мм (на 1 мм нанесено 100 непрозрачных штрихов). Под какими углами будут наблюдаться спектры первого порядка для фиолетового ( $\lambda_{\text{ф}} = 0,4$  мкм) и красного цветов ( $\lambda_{\text{к}} = 0,76$  мкм)?

**Решение.** Из условия для главных максимумов  $d \cdot \sin \varphi = k \cdot \lambda$ , запишем:  
 $\sin \varphi = \frac{k \cdot \lambda}{d}$ . Для фиолетового цвета:  $\sin \varphi_{\text{ф}} = \frac{1 \cdot 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}}{10^{-5} \text{ м}} = 0,04$ ,  $\varphi_{\text{ф}} = 2,3^\circ$ .

Для красного цвета:  $\sin \varphi_{\text{к}} = \frac{1 \cdot 0,76 \cdot 10^{-6} \text{ м}}{10^{-5} \text{ м}} = 0,076$ ,  $\varphi_{\text{к}} = 4,4^\circ$ .

**Ответ.** Углы небольшие:  $\varphi_{\text{ф}} = 2,3^\circ$ ,  $\varphi_{\text{к}} = 4,4^\circ$ , но красный отклоняется почти на вдвое больший угол. Весь же видимый спектр первого порядка распределяется в пределах  $2,1^\circ$ .

**Дисперсия решётки. Применение, изготовление дифракционных решёток.** Способность дифракционной решётки разлагать электромагнитное излучение в спектр, по которому можно много узнать об излучающем его объекте, позволило сделать её одним из важнейших инструментов познания, особенно в астрономии.

Чем шире спектр, то есть чем на больший угловой интервал  $\Delta\varphi$  растягивается данный участок длин волн  $\Delta\lambda$ , тем больше нюансов можно узнать, значит, тем ценнее такая решётка в качестве спектрального прибора.

*Угловая дисперсия решётки  $D_\varphi$  – скалярная величина, характеризующая способность дифракционной решётки разлагать свет в спектр. Она равна отношению малого интервала углов  $\Delta\varphi$ , на который растягивается малый участок длин волн, к значению этого интервала длин волн  $\Delta\lambda$ :*

$$D_\varphi = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda}, \quad [D_\varphi] = \frac{\text{рад}}{\text{м}} = \frac{1}{\text{м}}.$$

Дисперсия решётки численно равна интервалу углов разброса направления отражённого или прошедшего через решётку пучка света для единичного интервала длин волн.

Дисперсия решётки измеряется в радианах на метр.

**Пример 14.** Пусть дисперсия некоторой решётки равна  $D_\varphi = 5 \text{ угл.секунд/нм} = 5 \text{ ''/нм}$ . Что это значит?

✓ **Ответ.** Это значит, что данная решётка растягивает интервал длин волн 1 нм на угол 5 угловых секунд после прохождения параллельного пучка через эту дифракционную решётку.

Из выражения для главных максимумов  $d \cdot \sin\varphi = k \cdot \lambda$  запишем:  $\sin\varphi = \frac{k \cdot \lambda}{d}$ . Продифференцируем это выражение:

$$\Delta\varphi \cdot \cos\varphi = \frac{k \cdot \Delta\lambda}{d}.$$

Подставляя это выражение в формулу по определению дисперсии решётки, получим:

$$D_\varphi = \frac{k}{d \cdot \cos\varphi}.$$

Видно, что дисперсия решётки прямо пропорциональна порядку спектра  $k$ , то есть чем больше номер спектра, тем он шире. Дисперсия решётки обратно пропорциональна постоянной решётки (периоду решётки), то есть чем больше штрихов на 1 мм, тем сильнее растягивается спектр. И чем больше



угол, под которым наблюдается спектр данного порядка, тем больше дисперсия.

Хорошие решётки имеют тысячи щелей и непрозрачных промежутков (штрихов) на 1 мм! А общее число щелей на решётке шириной 15 см превышает 150 000.

Изготовить решётку нужно очень точно. Если хотя бы одна щель смещена от заданного положения более чем на 0,01 мкм, то есть на 1/50 длины волны, решётку бракуют. Нарушение правильности чередования щелей искажает дифракционную картину, приводит к появлению ложных линий – «духов».

Изготовление хороших дифракционных решёток – трудная научно-техническая задача. Машину для изготовления решёток устанавливают на глубоко врытом в землю массивном фундаменте. Температуру в помещении поддерживают постоянной с точностью до 0,01 К. При изготовлении одной решётки алмазный резец проходит путь до 27 км. Перед нарезанием машина работает на холостом ходу от 5 до 20 часов для стабилизации режима работы всех узлов. Нарезание одной решётки длится до 7 суток при времени нанесения одного штриха 3 с.

Основная область применения решёток – спектральный анализ. С помощью хороших решёток удастся разделить спектральные линии, для которых разность длин волн составляет всего 1/400 000 длины световой волны.

✍ **Пример 15.** Чему равна дисперсия решётки в спектре первого порядка, если постоянная решётки равна  $d = 10^{-3}$  мм?

➡ **Решение.**  $D_{\varphi} = \frac{k}{d \cdot \cos \varphi}$ . Поскольку в спектре первого порядка угол  $\varphi$

мал, то  $\cos \varphi \approx 1$ .

$$\text{Тогда } D_{\varphi} \approx \frac{k}{d} = \frac{1}{10^{-3} \text{ мм}} = 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{мм}} = 10^3 \cdot \frac{57,3 \cdot 60'}{10^6 \text{ нм}} = 3,4' / \text{нм}. \leftarrow$$

✓ **Ответ.** Угловая дисперсия решётки равна 3,4 угловой минуты на интервал длин волн 1 нм. То есть световые волны, отличающиеся по длине волны в пределах одного нанометра, разойдутся в угловом интервале 3,4 угловой минуты.

## § 26. Электромагнитные волны

**Электромагнитное поле.** Вокруг неподвижного заряженного тела находится электростатическое поле. Если по проводнику идёт постоянный электрический ток, то вокруг него существует магнитное поле. Если же заряженная частица движется ускоренно, то существующее вокруг неё поле

имеет два компонента: электрическую и магнитную составляющие электромагнитного поля. Теорию электромагнитного поля создал английский физик Д. К. Максвелл в 1864 г.

В основе его теории лежат два основных явления.

**1. Явление электромагнитной индукции** – явление возникновения вихревого электрического поля при всяком изменении магнитного поля.

Это явление открыто Фарадеем в 1831 г.

**2. Явление магнитоэлектрической индукции** – при всяком изменении электрического поля в окружающем пространстве возникает вихревое магнитное поле.



Джеймс Клерк  
Максвелл (1831–1879)

Это явление предсказано Максвеллом из соображения симметрии.

В 1864 г. Д. К. Максвелл после ознакомления с экспериментальными работами Фарадея изложил законы электромагнетизма в математической форме.

Согласно Максвеллу, электромагнитные волны (свободное электромагнитное поле) излучаются ускоренно движущимися заряженными частицами. Электромагнитные волны являются поперечными (хотя недавно открыты и продольные электромагнитные волны, с помощью которых взаимодействуют биологические объекты).

Совпадение скорости электромагнитных волн с экспериментально полученным значением скорости света позволило Максвеллу высказать предположение, что свет представляет собой частный случай электромагнитных волн.

Волновой процесс можно описать волновым уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2}, \quad (14)$$

где  $a$  – колеблющаяся величина,  $c$  – скорость волны,  $x$  – пространственная координата,  $t$  – время.

Максвелл показал, что напряжённость электрического поля  $E$  при распространении электромагнитных волн удовлетворяет волновому уравнению. Запишем его для вакуума:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \quad (15)$$

где  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – электрическая постоянная,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная.

Сравнивая (14) и (15), получим:

$$\frac{1}{c^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ (м/с)}.$$

Напряжённость электрического поля  $\vec{E}$  и индукция магнитного поля  $\vec{B}$  волны изменяются синхронно. Они направлены перпендикулярно друг другу и направлению распространения волны.

Укажем правило взаимного расположения векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{v}$  (рис. 46). Если большой палец левой руки направить по оси колебаний вектора напряжённости  $\vec{E}$  электрического поля волны (ось  $Z$ ), а средний палец по оси колебаний вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  магнитного поля волны (ось  $X$ ), то указательный палец покажет направление скорости  $\vec{v}$  распространения электромагнитной волны (ось  $Y$ ).

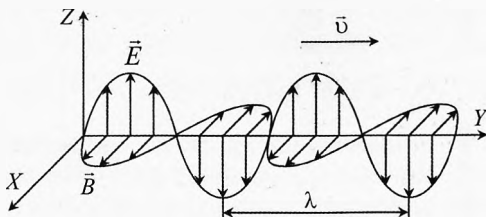


Рис. 46. Электромагнитная волна

**Опыты Герца.** Экспериментально электромагнитные волны были обнаружены Г. Герцем в 1887 г. Герц изготовил два одинаковых *вибратора*, представляющих собой прямые проводники с небольшим разрезом посередине (рис. 47). С помощью высоковольтного источника (катушки Румкорфа) Герц заряжал один вибратор. Через воздушный промежуток проскакивала искра. На небольшом расстоянии (1–2-м) параллельно излучающему вибратору был установлен второй такой же вибратор (с такой же частотой собственных колебаний), в котором тоже проскакивала искра сразу, как проскакивала искра в первом вибраторе. Энергия электромагнитной волны, падающей на второй вибратор, вызвала в нём искру. Поскольку их собственные частоты одинаковы, то второй вибратор входит в резонанс с первым. Таким образом, вторым вибратором регистрировались электромагнитные волны, созданные первым вибратором.

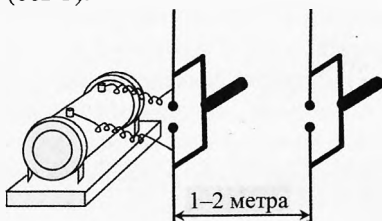


Рис. 47. Опыт Герца

Затем Герц установил за вторым вибратором металлический экран. Во время излучения первого вибратора появлялась отражённая от экрана волна. Совместно с падающей волной они создали стоячую волну между экраном и первым вибратором. Передвигая второй (приёмный) вибратор, Герц обнаружил точки, где находились пучности стоячей волны. В них искра на приёмном вибраторе была наиболее сильной. Расстояние между



Генрих Рудольф Герц (1857–1894)

пучностями стоячей волны, как известно, составляет половину длины волны. Зная геометрию вибратора, Герц заранее вычислил собственную частоту  $\nu$  его колебаний. Затем он вычислил скорость волны по формуле  $c = \lambda \cdot \nu$ . Она совпала со скоростью света. Таким образом, Герц экспериментально подтвердил теорию электромагнитного поля Максвелла.

Кстати, Герц написал уравнения Максвелла в более удобной для восприятия форме. Жаль, что прожил он очень мало лет.

Световые волны отличаются от радиоволн лишь частотой (длиной волны). Так как излучение радиоволн в вибраторе Герца обусловлено колебаниями заряженных частиц и частота волны равна частоте их колебаний, то можно предположить, что излучение видимого света нагретыми телами также обусловлено колебаниями заряженных частиц (электронов), но только с большей частотой.

## § 27. Изобретение радио

Возможность практического применения электромагнитных волн впервые продемонстрировал преподаватель минных курсов для моряков г. Кронштадта А. С. Попов 7 мая 1895 г. В России 7 мая считается праздником – днём рождения радио. Попов изготовил сначала грозоотметчик – прибор для регистрации электромагнитных волн, возникающих при ударе молнии.

Прибор Попова содержал когерер  $MN$  (стеклянную трубку, заполненную железными опилками), электромагнитное реле, электрический звонок и источник тока (рис. 48). При встрече электромагнитной волны с антенной приёмника в цепи возникали вынужденные колебания свободных электронов (переменный ток). Когерер через источник тока был подключен последовательно к электромагнитному реле.

При отсутствии электромагнитной волны сопротивление когерера (из-за плохого контакта между железными опилками) было велико и реле не срабатывало. Под действием переменного тока высокой частоты от электромагнитной волны во время грозы в когерере возникали электрические разряды между опилками. Они спекались, и сопротивление когерера уменьшалось в 100–200 раз. Сила тока в катушке реле резко возрастала, и реле включало звонок. Так регистрировался приём электромагнитной волны.



Александр Степанович  
Попов (1859–1906)

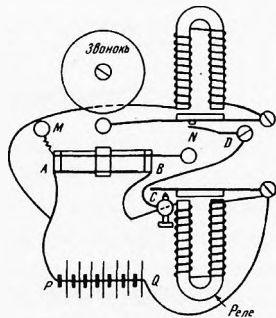


Рис. 48. Грозоотметчик  
Попова

Молоточек электровзвонка, ударяя по когереру, встряхивал опилки и возвращал его в исходное состояние (сопротивление резко возрастало), и приёмник снова был готов отмечать грозовые разряды.

На следующий год А. С. Попов построил импульсный передатчик электромагнитных волн, позволивший передавать короткие и длинные импульсы электромагнитных волн, а значит и информацию при помощи азбуки Морзе. Источником электромагнитных волн в радиопередатчике была антенна, соединённая с искровым разрядным промежутком.

Первая в мире радиограмма была передана на расстояние 25 км азбукой Морзе и состояла из двух слов «Генрих Герц». В 1899 г. А. С. Попов установил радиосвязь на расстоянии 50 км между кораблями.



Гульельмо Маркони  
(1874–1937)



Рис. 49. Один из первых приемопередатчиков Маркони.  
Трубка спереди наверху – это когерер (Фото: Chetvorno /  
Wikimedia Commons, CC BY-SA 3.0)

Большой вклад в развитие радиосвязи внёс итальянский радиотехник и предприниматель Г. Маркони (рис. 49). В 1901 г. он впервые осуществил радиосвязь через Атлантический океан.

## § 28. Принципы радиосвязи

*Мишка Шифман башковит –  
У него предвиденье.  
«Что мы видим, – говорит, –  
Кроме телевиденья?»*

Из песни В. С. Высоцкого

Энергия электромагнитных колебаний, излучаемых генератором незатухающих колебаний, при одинаковой амплитуде колебаний силы тока в антенне пропорциональна четвертой степени частоты колебаний:

$$P_{\text{изл}} = k \cdot \nu^4.$$

На частотах в десятки, сотни и даже тысячи герц интенсивность электромагнитных колебаний ничтожно мала, поэтому при распространении быстро затухает. Поэтому для осуществления радио- и телевизионной связи используются электромагнитные волны с частотой от нескольких сотен тысяч герц до сотен мегагерц.

Значит, для эффективной работы нужно использовать более высокую несущую частоту электромагнитного излучения.

Для передачи речи, музыки или изображения их сначала необходимо преобразовать в электрический сигнал, представляющий собой низкочастотные электромагнитные колебания, которые, к сожалению, трудно излучать в пространство. Поэтому низкочастотный информационный сигнал необходимо «присоединить» к высокочастотным несущим электромагнитным колебаниям. Такие колебания с несущей частотой вырабатываются специальным генератором незатухающих электромагнитных колебаний. Это «присоединение» называется модуляцией.

Широко известна амплитудная модуляция.

**При амплитудной модуляции** высокочастотные колебания плавно изменяются по амплитуде с частотой колебаний полезного сигнала. Модулированная по амплитуде высокочастотная волна излучается антенной и летит к потребителям со скоростью света.

К антенне 1 (рис. 50) приёмника прилетают сигналы от многих радиостанций, а выбрать нужно только одну, т.к. никто не сможет слушать одновременно много радиостанций. Для нужного выбора используется приёмный колебательный контур 2, состоящий из катушки индуктивности и конденсатора, который может настраиваться в острый резонанс на различных высоких частотах. Из всех колебаний электронов в антенне выделяется только одна несущая частота, на которую этот контур настроен в резонанс. Эти колебания проходят через детектор, представляющий собой элемент с односторонней проводимостью тока, например полупроводниковый диод 3, который пропускает только одну половину модулированных колебаний. Затем колебания сглаживаются  $RC$ -контуром (5 и 4) и динамик 6 воспроизводит низкочастотные колебания. Этот процесс называется детектированием или демодуляцией. Так работает детекторный радиоприёмник – основа любого радиоприёмника.

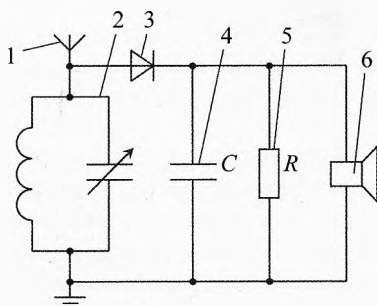


Рис. 50. Радиоприёмник

Если сигнал высокой частоты на выходе слаб, то его сначала усиливают каскадом, называемым усилителем высокой частоты (УВЧ), а затем детек-

тируют. Если сигнал высокой частоты на выходе слаб, то его сначала усиливают каскадом, называемым усилителем высокой частоты (УВЧ), а затем детек-

тируют (рис. 51). Для громкого воспроизведения после детектирования сигнал подается на вход усилителя низкой частоты (УНЧ). Усиленный по мощности низкочастотный сигнал воспроизводится громкоговорителем.

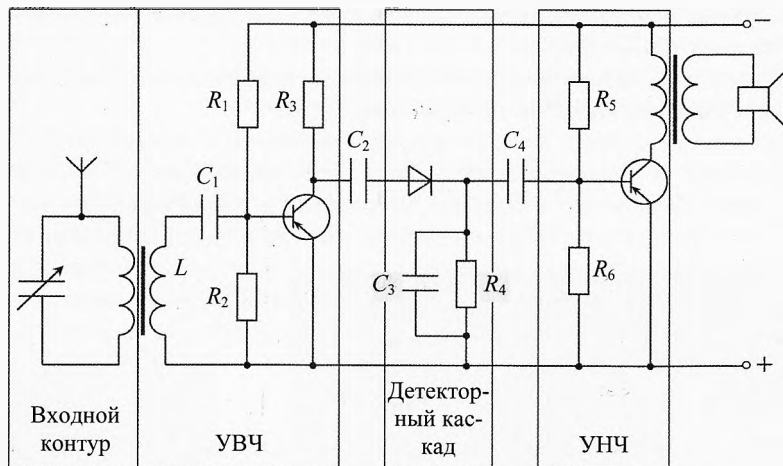


Рис. 51. Радиоприёмник с каскадами усиления

Амплитудная модуляция очень чувствительна к помехам даже от сотовых телефонов, поэтому в радиосвязи чаще применяют частотную модуляцию (рис. 52).

**При частотной модуляции** несущая частота плавно изменяется в такт с частотой полезного низкочастотного сигнала.

При передаче изображения его разбивают по строчкам. В каждой точке строчки электрический сигнал соответствует яркости освещения этой точки. Этот низкочастотный электрический сигнал (который существенно выше речевого сигнала) модулирует несущую частоту. При передаче звука и изображения телевизионного сигнала отдельно передают звук, изображение и синхронизирующие сигналы, чтобы картинка была стабильной. Сигналы звука и изображения могут передаваться с некоторой, в том числе разной, задержкой по времени. Завесом иногда слышать от комментатора «Гол!», когда на экране он ещё не забит. И мяч влетает в ворота через пару секунд после того, как мы о нём услышали. Для передачи цветного изображения используется три комплекта ви-

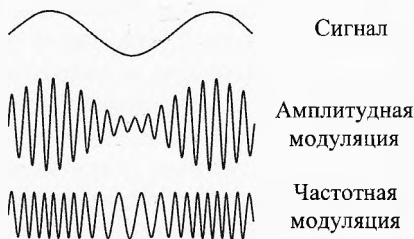


Рис. 52. Модуляция сигнала

деосигналов, воздействующих на синие, красные и зеленые точки экрана. Благодаря их смешиванию мы видим изображение во всём разнообразии цветов.

За последнюю четверть века радиосвязь развивалась невиданными ранее темпами. Благодаря развитию сотовой связи, компьютеризации и широкому проникновению интернета в жизнь общества любой человек может сейчас пообщаться с любым другим в любой точке Земли. Также можно работать, не выходя из дома, и получать любую доступную информацию.

## § 29. Шкала электромагнитных излучений

Электромагнитное излучение характеризуется как волновыми (длина волны, частота), так и квантовыми величинами (энергия, импульс). Чем больше частота излучения, тем в большей мере проявляются квантовые свойства, а чем меньше частота, тем больше проявляются волновые свойства. Спектр электромагнитных излучений огромен. Его принято делить по частотным диапазонам. В таблице 2 приведены названия диапазонов интервалы длин волн и соответствующие им частоты. Следует отметить, что границы спектров условны. Иногда они перекрываются.

**1. Низкочастотные электромагнитные излучения** представляют собой электромагнитные волны, частота которых не превышает 100 кГц. Этот диапазон частот используется в электротехнике. В промышленной электроэнергетике России применяется частота 50 Гц, а в США – 60 Гц, на которых осуществляется передача электромагнитной энергии по линиям и преобразования напряжения трансформаторами.

В авиации и наземном транспорте часто используется частота 400 Гц, что позволяет уменьшить массу электрических машин и трансформаторов в 8 раз по сравнению с машинами на частоте 50 Гц. В импульсных источниках питания последних поколений используются частоты тока до десятков килогерц, что делает их компактными, энергонасыщенными.

Если проходишь под мощной линией электропередач с включённым радиоприёмником, то он начинает сильно гудеть на частоте 50 Гц. Это низкочастотное электромагнитное излучение от линии электропередач.

**2. Радиоволны** представляют собой электромагнитное излучение, длина волны которых более 1 мм (частота менее 300 ГГц). Из таблицы видно, что они подразделяются на: длинные, средние, короткие и ультракороткие радиоволны. Ультракороткие радиоволны принято подразделять на метровые, дециметровые, сантиметровые, миллиметровые. Волны с длиной волны менее 1 м (частота > 300 МГц) принято называть микроволнами или волнами сверхвысоких частот (СВЧ). Радиоволны возникают при протекании по проводникам переменного тока соответствующей частоты. И наоборот, проходящая в пространстве электромагнитная волна возбуждает в проводнике соответствующий ей переменный ток. Это свойство используется в радио-



технике при конструировании антенн. Естественным источником волн радиодиапазона являются грозы.

**Таблица 2. Шкала электромагнитных излучений**

Название диапазона		Частота излучения	Длина волны, $\lambda$
Низкочастотные (сверхдлинные)		0 – 100 кГц	более 3 км
Радиоволны	Длинные	100 – 300 кГц	3 – 1 км
	Средние	300 кГц – 3 МГц	1 км – 100 м
	Короткие	3 – 30 МГц	100 – 10 м
	Ультракороткие	30 МГц – 300 ГГц	10 м – 1 мм
Оптическое излучение	Инфракрасное	300 ГГц – 429 ТГц	1 мм – 780 нм
	Видимое	429 – 750 ТГц	780 – 380 нм
	Ультрафиолетовое	0,75– 30 ПГц	380 – 10 нм
Рентгеновское излучение		30 ПГц – 60 ЭГц	10 нм – 5 пм
Гамма излучение		более 60 ЭГц	менее 5 пм

**Лирическое отступление.** Между Первой и Второй Мировыми Войнами в московских домах, расположенных вокруг радиостанций имени Коминтерна, которая вещала на длине волны 2 км, можно было пользоваться бесплатным электричеством. Действительно, можно было намотать на рамку около сотни витков провода, присоединить к их концам лампочку от карманного фонаря и она загоралась. Изменяющаяся напряжённость магнитного поля радиоволны составляла несколько А/м. Сейчас во многих странах это предельно допустимый уровень для 8-часового рабочего дня. А москвичи жили постоянно в поле этих радиоволн.

Большую проблему загрязнения земной поверхности электромагнитным излучением создают радиопередающие центры (РПЦ), которых становится всё больше. Например, только Министерству связи РФ принадлежит более 100 РПЦ, а ведь под них отводятся большая площадь – до 10 км<sup>2</sup>. Телевизионные передатчики в городах расположены на высоте 110 м. От передатчика мощностью 1 МВт на расстоянии 1 км напряжённость электрического поля составляет примерно 15 В/м.

Необходимо отметить, что на фоне РПЦ антенны базовых станций сотовой телефонной связи вносят незначительный вклад в электромагнитное загрязнение городских улиц. Разумеется, нежелательно находиться в непосредственной близости с антенной на крыше дома, где они установлены. Кроме хорошего сигнала мобильной связи для жителей таких домов есть и другой плюс. На нашем доме установлены антенны двух сотовых операторов. Они платят за аренду в общем 15 тыс.р. в месяц. Благодаря этому на 150 руб. в месяц уменьшена жильцам плата за обслуживание дома. Но, тем не менее некоторые жильцы судятся с управляющей компанией и операторами сотовой связи. Если они выиграют суд, то антенны перенесут на соседний дом, а загрязнение электромагнитным излучением не уменьшится.

Деваться некуда от такой цивилизации. Небезвредны и сотовые телефоны. Но это плата за свободу общения любого человека с любым другим человеком в любых точках земного шара в любой момент времени.

Однако не рекомендуется долго разговаривать по сотовому телефону, так как во время разговора телефон излучает значительно больше электромагнитных волн, чем в режиме ожидания. Это излучение должно достичь ближайшей базовой станции Вашего сотового оператора, расстояние до которой более километра. А учитывая, что телефон находится вплотную к голове, то плотность потока излучения, которая обратна пропорциональна квадрату расстояния от источника, внутри головы в 100 миллионов раз больше, чем там, где находится вышка оператора. При необходимости продолжительного разговора используйте гарнитуру (проводные наушники с микрофоном), чтобы телефон был подальше от головы. Также подойдёт беспроводная гарнитура, так как мощность сигнала связи гарнитуры с телефоном (от 1 до 100 мВт) значительно меньше, чем мощность сигнала телефона (около 1 Вт) для связи с базовой станцией. Для сравнения мощность излучателей базовой станции обычно не превышает 10 Вт.

**3. Оптическое излучение.** Инфракрасное, видимое и ультрафиолетовое излучение составляют оптическую область спектра электромагнитных волн в широком смысле слова. Выделение такой области обусловлено не только близостью этих участков спектра по частотам, но и сходством приборов применяющихся для их исследования, разработанных исторически главным образом при изучении видимого света (линзы, зеркала, призмы, дифракционные решётки и др.).

В отличие от радиодиапазона в оптическом диапазоне кроме волновых существенно проявляются и квантовые свойства излучения.

Самым главным источником оптического излучения для землян является Солнце. Его поверхность (фотосфера) нагрета до температуры около 6000 К. Оно является звездой (жёлтым карликом). Максимум солнечного излучения расположен в жёлто-зелёной части спектра. В этой области находится и максимум спектральной чувствительности глаза. Именно потому что мы родились около этой звезды данный участок спектра излучения непосредственно воспринимается нашим глазом.

Около 48% всей энергии, излучаемой Солнцем, приходится на видимое излучение и около 45% – на инфракрасное излучение.

Излучение оптического диапазона можно обнаружить, нагревая, например электрическим током, спираль лампы накаливания (опыт хорошо проводить в тёмной комнате). При малом напряжении мы можем ощутить только поток тепла (инфракрасное излучение). Светиться спираль лампочки не будет. По мере увеличения напряжения спираль начинает светиться сначала красным, потом оранжевым и т.д. Чем сильнее нагревается тело, тем меньше длина волны, на которую приходится максимум плотности потока излучения (закон смещения Вина).

Видимое излучение может создаваться в химических и биореакциях. И наоборот. Источникам энергии для большинства живущих существ на Земле является фотосинтез – биореакция, протекающая в растениях под действием оптического излучения.

Ультрафиолетовое излучение более коротковолновое, чем видимое. Оно отличается высокой химической активностью. Повышенную чувствительность к ультрафиолетовому излучению обнаруживает фотоэмульсия. Ультрафиолетовые лучи мы не видим, но на сетчатку глаза и кожу (особенно губы, веки и ноздри) ультрафиолет действует сильно и разрушительно. Жарким летом долго нельзя быть на солнце в одном купальнике. А высоко в горах в любое время дня нельзя долго оставаться полуодетым. Поскольку верхние слои недостаточно ослабляют поток ультрафиолета (до допустимого уровня), то нужно быть не только одетым, но и носить стеклянные очки, не пропускающие ультрафиолет, а также повязку перекрывающую мордочку (нос и губы). На высоте свыше 3,5 км все так и ходят.

**4. Рентгеновское излучение.** В 1895 г. немецкий физик В. К. Рентген исследовал катодные лучи, возникающие при торможении электронов на аноде в газоразрядных трубках. Он обнаружил, что фотобумага засвечивается этими лучами даже будучи завернутой в чёрную бумагу. Он так же наблюдал, что бумажный экран, смоченный раствором платиносинеродистого бария, начинал светиться, если им обёртывалась разрядная трубка. И самое важное для практики рентгенографии, когда Рентген поместил руку между трубкой и экраном, то на нём были видны тени костей на фоне более светлых очертаний всей кисти руки. Он назвал неведомое ранее излучение X-лучами, которое используется во многих странах. В России и Германии оно называется рентгеновским излучением, хотя сам Рентген не приотвествовал это название.



Вильгельм Конрад  
Рентген (1845–1923)

**5. Гамма излучение** происходит при переходе атомного ядра из возбуждённого состояния в состояние с меньшей энергией, в т.ч. в стабильное состояние. Рентгеновское излучение можно считать волнами более высокой частоты, чем ультрафиолетовое, а гамма излучение – это ещё более короткие волны. В диапазонах рентгеновского и гамма излучений на первый план выступают квантовые свойства.



## Упражнения

**1** При каком движении, согласно теории Максвелла, заряженная частица излучает электромагнитные волны в вакууме: 1) только при равномерном движении по прямой в инерциальной системе отсчета (ИСО); 2) только при гармонических колебаниях в ИСО; 3) только при равномерном движении по окружности в ИСО; 4) при любом ускоренном движении в ИСО?

**2** При каких условиях можно наблюдать интерференцию света от двух источников?

**3** Мыльная плёнка с показателем преломления  $n = 4/3$  расположена вертикально, вследствие чего образует клин. На клин нормально падает свет длиной волны  $\lambda = 640$  нм. В проходящем свете видна интерференционная картина чередующихся тёмных и светлых полос. Какова толщина клина в том месте, где в проходящем свете возникает первая, считая от ребра клина, светлая полоса?

**4** Тонкую проволочку диаметром  $d = 0,09$  мм поместили между краями двух хорошо отполированных плоских стеклянных пластинок. Противоположные концы пластинок плотно прижали друг к другу (рис. 53). На верхнюю пластинку перпендикулярно поверхности падает монохроматический пучок света. Определить расстояние между двумя соседними интерференционными полосами в отражённом свете, если длина пластины  $L = 15$  см, длина волны  $\lambda = 600$  нм.

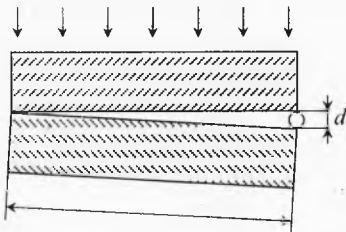


Рис. 53. Интерференция на воздушном клине

**5** Дифракционная решётка с периодом  $d = 0,01$  мм удалена от экрана на расстоянии  $L = 1$  м. На решётку нормально падает белый свет. Найти ширину спектра второго порядка для диапазона длин волн от фиолетового цвета  $\lambda_{\text{ф}} = 4 \cdot 10^{-7}$  м до красного  $\lambda_{\text{к}} = 7 \cdot 10^{-7}$  м.

**6** За дифракционной решёткой с периодом  $d = 0,01$  мм параллельно её плоскости расположена собирающая линза с фокусным расстоянием  $F = 6$  см. В фокальной плоскости линзы находится экран. На решётку нормально её поверхности падает параллельный пучок монохроматического света с длиной волны  $\lambda = 500$  нм. Определить расстояние между максимумами первого и второго порядков на экране.

**7** Структура кристаллической решётки исследуется пучком электронов, имеющих одинаковую скорость, направленную перпендикулярно поверхности кристалла вдоль оси  $Z$  (рис. 54). Часть электронов после взаимодействия с кристаллом отражается под разными углами, образуя дифракционные максимумы. Определить период атомной решётки  $d$  исследуемого вещества вдоль оси  $X$ , если кинетическая энергия электронов равна  $E = 54$  эВ, а первый дифракционный максимум соответствует отражению электронов под углом  $\alpha = 50^\circ$  к оси  $Z$  в плоскости  $XOZ$ ?

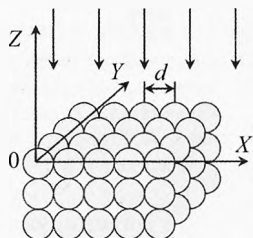


Рис. 54. Дифракция на кристаллической решётке

**8** Структура мономолекулярного слоя вещества исследуется пучком электронов, имеющих одинаковую скорость, направленную перпендикулярно исследуемому слою. В результате дифракции на молекулах, образовавших периодическую решётку, часть электронов отклоняется на определённые углы, образуя дифракционные максимумы. Первый дифракционный максимум соответствует отклонению электронов на угол  $\alpha = 50^\circ$  от первоначального направления, а период молекулярной решётки составляет  $d = 0,215$  нм. Определить энергию падающих электронов.

**9** Параллельно экрану на расстоянии  $L = 1,8$  м расположена дифракционная решётка с периодом  $d = 0,01$  мм, на которую нормально падает параллельный пучок света с длиной волны  $\lambda = 580$  нм. Какого порядка максимум будет на экране на расстоянии  $x = 21$  см от центра наблюдаемой дифракционной картины?

**10** В установке Юнга расстояние между щелями равно  $d = 1$  мм, расстояние от щелей до экрана –  $L = 3$  м. Первый максимум отстоит от нулевого на расстоянии  $x_1 = 2$  мм. Определить длину световой волны.

**11** Параллельный пучок света падает нормально на круглую диафрагму радиусом  $R = 1,4$  мм, расположенную на расстоянии  $L = 1,3$  м от точки наблюдения. Что возникает в точке наблюдения – светлое или тёмное пятно? Длина световой волны  $\lambda = 0,5$  мкм.

**12** Сколько штрихов на 1 мм имеет дифракционная решётка, для которой зеленая линия спектра ртути ( $\lambda = 0,55$  мкм) в спектре первого порядка наблюдается под углом  $\varphi = 19^\circ 8'$ ?

**13** Пусть на диафрагму (отверстие диаметром  $d$ ) падает нормально параллельный пучок света с длиной волны  $\lambda$ . За диафрагмой на расстоянии  $L$  находится экран. Определить границы применимости геометрической оптики при наблюдении изображения на экране.

**14** Щель размером  $d = 0,5$  мм освещается красным светом от лазера, длина световой волны  $\lambda = 630$  нм. На каком расстоянии от щели можно отчетливо наблюдать дифракционную картину?

**15** Оценить наименьшее расстояние между двумя точками на Луне, которые видны раздельно в телескоп с диаметром зеркала  $d = 3$  м. Расстояние от Земли до Луны считать равным  $r = 380\,000$  км.

**16** Каков размер предмета, детали которого может уверенно различить на Земле космонавт, пользуясь оптической трубой с диаметром 20 см? Спутник находится на высоте 300 км над поверхностью Земли.

**17** Коэффициент пропускания видимого света для обычного однокамерного стеклопакета равен  $\alpha_{\text{одн}} = 0,8$ . Определить коэффициент пропускания для двухкамерного стеклопакета. Определить, какая часть прямого видимого света проходит в комнату за лоджией, если окна в комнате изготовлены из двухкамерных стеклопакетов, а лоджия, остеклена однокамерным стеклопакетом. Толщина всех стекол одинакова (4 мм).

### Решения, указания и ответы для самоконтроля

**1** При любом ускоренном движении в ИСО.

**3** В проходящем свете интерферируют луч 1 и 2: один прошедший сквозь плёнку, а второй – успевший дважды отразиться от границы плёнка–воздух (рис. 55). Геометрическая разность хода этих лучей  $2d$ , значит оптическая разность хода:  $\Delta = 2d \cdot n$ . Отражение лучей происходит от менее плотной среды, поэтому потери произвольны не происходит. Светлая полоса будет при  $\Delta = k \cdot \lambda$ , то есть при  $d = k \cdot \lambda / (2n)$ . Светлая полоса будет на самом ребре клина, затем будет слегка затемнённая

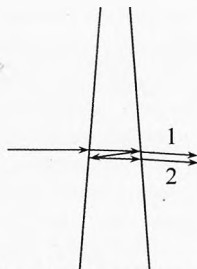


Рис. 55. Интерференция на мыльном клине

полоса, а затем снова светлая полоса при толщине клина  $d = \lambda/(2n) = 240$  нм. Несложно убедиться, что в отражённом свете светлые полосы будут на месте тёмных в проходящем свете и наоборот. Это вполне согласуется с законом сохранения энергии. В проходящем свете «тёмная» полоса будет лишь слегка затемнена, поскольку луч 2 – дважды отражённый луч и его интенсивность будет существенно меньше, чем у проходящего луча 1.

**4** Оптическая длина пути луча, отражённого от верхней поверхности нижней пластинки больше, чем у луча, отражённого от нижней поверхности верхней пластинки, на двойную толщину воздушной прослойки  $2h$  и ещё на половину длины волны  $\lambda/2$ , которая потеряется при отражении от нижней пластинки, как от более плотной среды:  $\Delta = 2h + \frac{\lambda}{2}$ , где  $h = d \cdot \frac{x}{L}$  – толщина воздушной прослойки на расстоянии  $x$  от места стыковки пластинок. Для соседних светлых полос должно выполняться:  $\Delta_k = k\lambda$ ,  $\Delta_{k+1} = (k+1)\lambda$ , значит  $\Delta_{k+1} - \Delta_k = \lambda$ . Подставляя выражение для  $\Delta$ , получим:

$$\left(2d \cdot \frac{x_{k+1}}{L} + \frac{\lambda}{2}\right) - \left(2d \cdot \frac{x_k}{L} + \frac{\lambda}{2}\right) = \lambda \Rightarrow \Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda L}{2d} = 0,5 \text{ мм.}$$

**5**  $d \cdot \sin \varphi = k \cdot \lambda$ ,  $\sin \varphi \approx \tan \varphi = \frac{x}{L}$ ;  $\Rightarrow x = \frac{k \cdot \lambda \cdot L}{d}$ . Разность координат красного и фиолетового максимумов при  $k = 2$ :  $\Delta x = \Delta x_{2\kappa} - \Delta x_{2\phi} = \frac{2 \cdot (\lambda_{\kappa} - \lambda_{\phi}) \cdot L}{d} = 6 \text{ см.}$

**6**  $d \cdot \sin \varphi = k \cdot \lambda$ ,  $\sin \varphi \approx \tan \varphi = \frac{x}{F}$ ,  $\Rightarrow x = \frac{k \cdot \lambda \cdot F}{d}$ ,  $\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{\lambda \cdot F}{d} = 3 \text{ мм.}$

**7** В данной задаче электроны проявляют свои волновые свойства и представляют собой волну с длиной волны де Бройля:  $\lambda = \frac{h}{p}$ , где  $h$  – постоянная Планка,  $p = \sqrt{2m_e E}$  – импульс электрона (так как энергия небольшая, то электроны дорелятивистские). Кристаллическую решётку в данном случае можно рассматривать как дифракционную решётку с периодом  $d$ . Поэтому условие первого максимума ( $k = 1$ ) в отражённой электронной волне:  $d \cdot \sin \alpha = k \cdot \lambda$ . Итак,  $d = \frac{k \cdot h}{\sin(\alpha) \cdot \sqrt{2m_e E}} = 2,18 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$

**8** Длина волны де Бройля электрона:  $\lambda = \frac{h}{p}$ , где  $p = m_e \cdot v$  – импульс электрона. Условие первого максимума ( $k = 1$ ) в прошедшей через молекулярную решётку электронной волне:  $d \cdot \sin \alpha = k \cdot \lambda$ . Кинетическая энергия электрона:  $E = \frac{m_e v^2}{2} = \frac{1}{2m_e} \cdot \left(\frac{k \cdot h}{d \cdot \sin(\alpha)}\right)^2 = 8,88 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 55,5 \text{ эВ.}$

**9** Условие максимума интерференции:  $d \cdot \sin \alpha = k \cdot \lambda$ , где  $\sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{x}{L}$ ,  $\Rightarrow k = \frac{d \cdot x}{L \cdot \lambda} = \frac{10^{-5} \cdot 0,21}{1,8 \cdot 580 \cdot 10^{-9}} = 2.$

**10**  $d \cdot \sin \varphi = \lambda$ ;  $x_1 \approx L \cdot \sin \varphi$ ;  $\Rightarrow \lambda = d \cdot x_1 / L = 670 \text{ нм.}$

**11** В данном случае зоны Френеля представляют кольца, лежащие в плоскости отверстия. Радиус кольца, с номером  $k$  найдём по теореме Пифагора:

$R_k^2 = r_k^2 - L^2$ , где расстояние от края зоны до точки наблюдения:  $r_k = L + \frac{\lambda}{2} \cdot k$ . Зна-

чит,  $k = \frac{2(\sqrt{L^2 + R_k^2} - L)}{\lambda} \approx \frac{R_k^2}{\lambda \cdot L}$ . Подставляя  $R_k = R$ , найдём, что в отверстии будет  $k = 3$  зоны Френеля, значит будет светлое пятно.

**12**  $d \cdot \sin \varphi = \lambda$ ;  $\Rightarrow d = \lambda / \sin \varphi = 1,678 \cdot 10^{-3}$  мм. То есть 596 штрихов/мм.

**13** Диаметр изображения на экране (рис. 56) равен:  $D = d + 2\Delta$ , где  $\Delta \approx L \cdot \sin \varphi$  – расстояние до первого минимума,  $d \cdot \sin \varphi = \lambda/2$ . Значит,

$$D = d + L \cdot \lambda / d.$$

Итак, дифракция не наблюдается, если  $L \cdot \lambda / d \ll d$ , или  $L \cdot l \ll d^2$ .

Если же  $L \cdot \lambda$  сравнимо (или больше), чем  $d^2$ , то необходимо учитывать дифракцию и применять геометрическую оптику нельзя.

**14** Диаметр пятна  $D = d + L \cdot \lambda / d$  в два раза больше отверстия уже на расстоянии  $L = d^2 / \lambda = 40$  (см). При увеличении расстояния дифракционная картина будет наблюдаться ещё лучше.

**15** Угловое расстояние между точками, которые можно распознать:  $\varphi = \lambda / d$ , где  $\varphi = x / r$ . Для зеленого света ( $\lambda = 550$  нм):  $x = \lambda \cdot r / d \approx 70$  м.

**16**  $\varphi = \lambda / d$ , где  $\varphi = x / h$ . Для зеленого света ( $\lambda = 550$  нм):  $x = \lambda \cdot h / d \approx 80$  см.

**17** В однокамерном стеклопакете два стекла, пространство между которыми обычно заполняется инертным газом (аргон Ar или криптон Kr). Через первое стекло пройдет только часть уличного света, равная коэффициенту пропускания  $\alpha_1$  одного стекла, в такой же степени ослабится свет при прохождении через второе стекло этого же стеклопакета, поэтому общий коэффициент пропускания  $\alpha_{\text{одн}}$  однокамерного стеклопакета с двумя стёклами равен:  $\alpha_{\text{одн}} = \alpha_1^2$ ,  $\Rightarrow \alpha_1 = \sqrt{\alpha_{\text{одн}}} \approx 89,4\%$ . В двухкамерном стеклопакете три стекла:  $\alpha_{\text{дв}} = \alpha_1^3 \approx 71,6\%$ . Значит в лоджию пройдет 80% уличного света (по условию), а в комнату 71,6% от света, прошедшего в лоджию:  $\alpha_{\text{комн}} = \alpha_{\text{одн}} \cdot \alpha_{\text{дв}} \approx 57\%$ . То есть даже через чистые окна проходит чуть больше половины света (рис. 57).

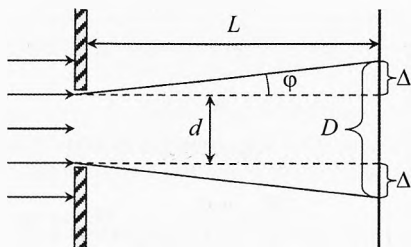


Рис. 56. границы применимости геометрической оптики

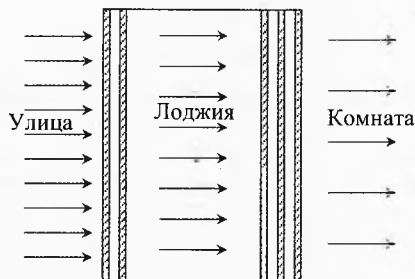


Рис. 57. Поглощение света стеклопакетом

# Глава 4. Геометрическая оптика

*Вся гордость учителя в учениках,  
в росте посеянных им семян.*

Дмитрий Иванович Менделеев

## § 30. Законы геометрической оптики

**Геометрическая оптика** – это раздел физики, в котором изучается распространение света и получение изображений в оптических системах, когда не проявляются волновые свойства света.

Геометрическая оптика базируется на основе простых законов, установленных опытным путем.

**Закон прямолинейного распространения света.** В однородной среде свет распространяется прямолинейно.

Линия, вдоль которой распространяется свет, называется лучом. В однородной среде лучи света представляют собой прямые линии; в неоднородной среде свет может преломляться и менять направление движения.

**Закон отражения.** Закон отражения устанавливает изменение направление луча при встрече с отражающей поверхностью.

*Луч падающий, отраженный и нормаль к границе раздела двух сред лежит в одной плоскости. Угол отражения равен углу падения, при любых углах падения (рис. 1):*

$$\alpha = \gamma$$

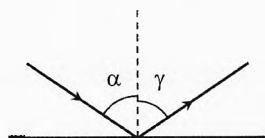


Рис. 1. Закон отражения

Закон отражения впервые упоминается в «Катоптрике» Евклида (примерно 300 лет до н.э.).

**Закон преломления.** Закон преломления устанавливает изменение направления луча при переходе из одной среды в другую.

*Падающий и преломлённый лучи лежат в одной плоскости с нормалью к границе раздела двух сред. Отношение синуса угла падения  $\alpha$  к синусу угла преломления  $\beta$ , есть величина постоянная при любых углах падения (рис. 2):*

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$$



где  $n$  – показатель преломления второй среды относительно первой. Показатель преломления показывает степень преломления лучей, он равен отношению скорости света в первой среде к скорости во второй среде:

$$n = \frac{v_1}{v_2}$$

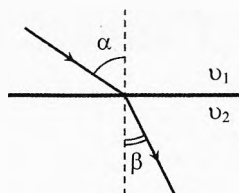


Рис. 2. Закон преломления

### Закон независимого распространения лучей.

*Лучи от разных источников не влияют друг на друга и распространяются независимо. Освещённость, создаваемая в данной точке несколькими источниками, равна арифметической сумме освещённостей, создаваемых каждым источником.*

**Принцип Ферма.** Французский математик и физик Пьер Ферма установил примерно в 1662 г. основной принцип геометрической оптики.

*Свет распространяется между двумя точками по пути, для прохождения которого требуется наименьшее время (принцип Ферма).*

В геометрической оптике вводится понятие оптической длины пути. Если расстояние между двумя точками равно  $l$ , а абсолютный показатель преломления среды  $n = \frac{c}{v}$ , где  $c$  – скорость света в вакууме,  $v$  – скорость



Пьер Ферма  
(1601–1665)

света в данной среде, то **оптическая длина пути в данной среде:**

$$S = n \cdot l$$

В вакууме оптическая длина пути равна геометрической:

$$n = 1 \Rightarrow S = l = c \cdot t.$$

В среде с показателем преломления  $n = \frac{c}{v}$ :

$$S = n \cdot l = n \cdot v \cdot t = \frac{c}{v} \cdot v \cdot t \Rightarrow S = c \cdot t$$

**Оптическая длина пути** между двумя точками среды – расстояние, на которое свет распространился бы в вакууме за время его прохождения между этими точками. Оптическая длина  $S$  пути в однородной среде с показателем преломления  $n$  равна произведению геометрической длины пути  $l$ , пройденного светом, на показатель преломления  $n$ .

С учётом понятия оптического пути (оптического хода) **принцип Ферма** можно сформулировать так:

*Из одной точки в другую свет распространяется по линии с наименьшей оптической длиной пути.*

Используя принцип Ферма легко обосновать закон отражения света.

Согласно закону отражения, свет распространяется так, что угол отражения  $\gamma$  равен углу падения  $\alpha$ . Но предположим, что в точку  $B$  свет попадёт, отразившись не от точки  $O$ , а от точки  $O_1$  (рис. 3). Построим зеркальное отражение  $B_1$  для точки  $B$ . Мы видим, что путь

$$AOB = AOB_1 = 2 \cdot AO.$$

Путь  $AO_1B$  больше пути  $AOB$ , поскольку  $AO_1B_1 > AOB_1$  (в  $\triangle AO_1B_1$  сумма сторон  $AO_1$  и  $O_1B_1$  больше, чем третья сторона  $AB_1$ ).

Значит, время распространения света из точки  $A$  в точку  $B$  будет минимально по маршруту  $AOB$ , ведь скорость света при любых вариантах траектории одинакова, а путь минимален по траектории  $AOB$ . Следовательно, из принципа Ферма вытекает, что свет отражается под таким же углом, под которым и падает.

Аналогично можно обосновать закон преломления, если учесть, что скорость света в двух средах отличается в  $n$  раз.

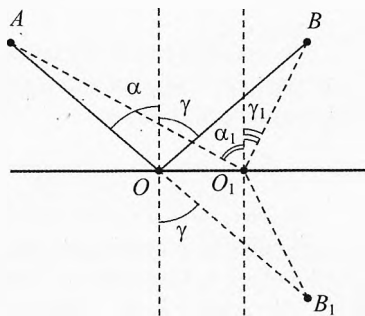


Рис. 3. Отражение света

## § 31. Границы применимости геометрической оптики

Расположим экран  $\mathcal{E}_1$  с круглой диафрагмой (отверстием) параллельно экрану  $\mathcal{E}_2$  и осветим первый экран параллельным пучком света (рис. 4).

Если на втором экране наблюдается светлое пятно такого же размера, как и у диафрагмы, то имеет место случай распространения света, подчиняющегося законам геометрической оптики.

Если же размер отверстия в первом экране существенно уменьшить и отодвинуть подальше второй экран, то светлое пятно на нём может оказаться больше отверстия из-за явления дифракции.

Напомним, что изображение от круглого отверстия на экране представляет собой первое светлое дифракционное пятно с угловым размером

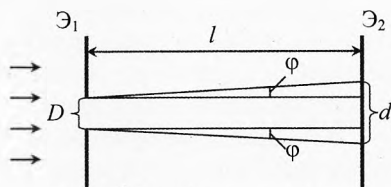


Рис. 4. Границы применимости геометрической оптики

$$\varphi = \frac{\lambda}{D},$$

где  $D$  – диаметр отверстия,  $\lambda$  – длина волны света.

Если расстояние между экранами равно  $l$ , то диаметр  $d$  изображения на экране будет равен:

$$d = D + 2l\varphi \quad \text{или} \quad \boxed{d = D + 2l \cdot \frac{\lambda}{D}} \quad (1)$$

Из последнего соотношения видно, что дифракция не наблюдается (то есть размер изображения  $d$  на экране примерно такой же, как размер  $D$  самого отверстия), если:

$$2l \cdot \frac{\lambda}{D} \ll D \quad \text{или} \quad 2l \cdot \lambda \ll D^2.$$

Значит, чем больше квадрат диаметра отверстия (то есть его площадь) по сравнению с произведением длины волны и расстояния между отверстием и экраном, тем меньше проявляется дифракция.

Дифракция явно наблюдается, когда произведение длины волны и расстояния между отверстием и экраном одного порядка или больше квадрата диаметра отверстия:

$$2l \cdot \lambda \geq D^2.$$

То есть чем больше расстояние от отверстия до экрана и чем меньше само отверстие, тем больше проявляется дифракция.

Найдём для отверстия диаметром  $D = 1$  см с длиной волны из середины визуального спектра  $\lambda = 0,6$  мкм из формулы (1) расстояние  $l$ , на котором изображение будет вдвое больше отверстия ( $d_1 = 2D$ ):

$$d_1 = D + 2l_1 \cdot \frac{\lambda}{D} \quad \text{или} \quad 2D = D + 2l_1 \cdot \frac{\lambda}{D}; \Rightarrow l_1 = \frac{D^2}{2\lambda} = \frac{0,01^2}{2 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}} = 83 \text{ (м)}.$$

В десять раз меньшая прибавка к  $D$  будет ( $\Delta d_2 = 0,1D$ ), если:

$$2l_2 \cdot \frac{\lambda}{D} = 0,1 \cdot D \Rightarrow l_2 = \frac{0,1D^2}{2\lambda} = 8,3 \text{ (м)}.$$

А в 100 раз меньше ( $\Delta d_3 = 0,01D$ ), то есть практически ненаблюдаемая, – на расстоянии от отверстия до экрана  $l_3 = 83$  см.

Если же при неизменном расстоянии между экранами уменьшать диаметр отверстия, то диаметр изображения  $d$  будет сначала уменьшаться в соответствии с законами геометрической оптики, а затем – возрастать, т.к. начнёт проявляться дифракция.

В предыдущем примере мы видели, что для отверстия диаметром 1 см на расстоянии  $l = 83$  см размер изображения увеличивается всего на 1%.

Вычислим, до какого размера нужно уменьшить диаметр отверстия, чтобы размер изображения на экране стал в два раза больше отверстия при том же расстоянии до экрана  $l = 83$  см. Поставляя в (1)  $d = 2D$ , получим:

$$2D = D + 2l \cdot \frac{\lambda}{D} \Rightarrow D^2 = 2l \cdot \lambda, \quad D = \sqrt{2l \cdot \lambda} = \sqrt{2 \cdot 0,83 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}} = 1 \text{ (мм)}.$$

Таким образом, уменьшая размер отверстия, через который пропускают свет, нельзя получить сколько угодно тонкий пучок света. Этому препятствует дифракция: уже при размерах отверстия 1 мм и расстоянии до экрана 83 см его изображение оказывается в 2 раза больше (2 мм).

Поэтому неверно понимать под лучом узкий пучок света. Луч — это направление, в котором распространяется свет.

## § 32. Плоское зеркало

**Зеркало** — это тело с полированной поверхностью, способное образовывать оптические изображения предметов, отражая свет.

В плоском зеркале отражающая поверхность полированная и плоская.

Плоские зеркала очень широко применяются в быту, науке, технике и медицине.

Изображение светящихся предметов в зеркале строится по закону отражения света.

Пусть  $S$  — источник света,  $S_1$  — его изображение. Из рис. 5 видно, что  $\angle SAO = \angle S_1AO$ . Поэтому расстояние от предмета  $S$  до зеркала  $SA = d$  равно расстоянию от зеркала до изображения  $S_1A = f$ . То есть

$$d = f.$$

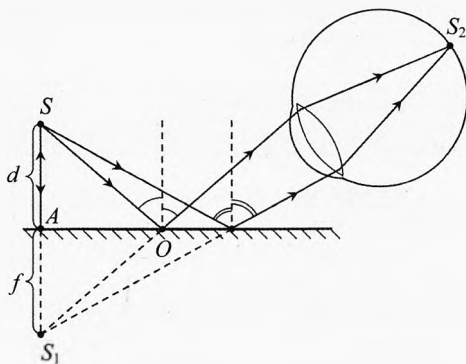


Рис. 5. Отражение в плоском зеркале

Причём изображение в плоском зеркале мнимое. Ведь из точки  $S_1$  свет не идёт к наблюдателю в глаз. Но глазу кажется, что свет попадает в него из точки  $S_1$ .

Построим в плоском зеркале изображение предмета высотой  $h$ , расположенного параллельно зеркалу.

Как видно из рис. 6, изображение предмета в плоском зеркале мнимое.

Наблюдателю лишь кажется, что источник света находится за зеркалом. Но если в это место поставить экран, то на нём не будет спроецировано реальное изображение.

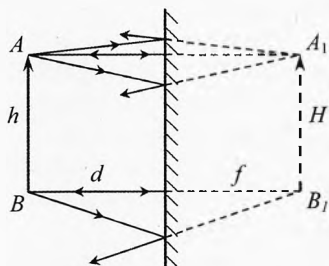


Рис. 6. Изображение в зеркале мнимое

Также видно, что изображение в плоском зеркале получается прямое (не перевёрнутое), и по размерам, совпадающее с самим предметом:

$$H = h.$$

Значит увеличение плоского зеркала равно единице:

$$\Gamma = \frac{H}{h}, \quad \Gamma = 1.$$

**Пример 1.** Какого размера и как нужно повесить плоское зеркало на вертикальной стене, чтобы человек мог видеть себя целиком? Зависит ли размер этого зеркала от расстояния от человека до зеркала?

✓ **Ответ.** Высота зеркала должна быть не менее половины высоты человека (рис. 7). Верхняя кромка зеркала должна быть на уровне верхней части лба (посередине между макушкой и уровнем глаз). Расстояние от человека до зеркала не влияет на необходимый размер зеркала.

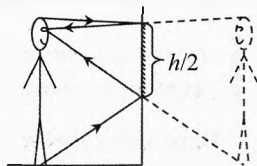


Рис. 7. Размер зеркала

**Пример 2.** Поместить свечу между двумя взаимно перпендикулярными зеркалами. Сколько изображений свечи и где будет видно?

→ **Решение.** Если свет от свечи к наблюдателю идёт, не отразившись от зеркал вообще, то наблюдатель увидит саму свечу в точке  $S$  (рис. 8).

Если свет успеет отразиться только от зеркала  $Z_1$ , то наблюдатель увидит первое изображение свечи в точке  $S_1$ .

Если свет отразиться только от зеркала  $Z_2$ , то наблюдатель увидит второе изображение свечи в точке  $S_2$ .

Если свет, отразившись от зеркала  $Z_1$ , затем отражается от зеркала  $Z_2$ , то наблюдатель увидит третье изображение.

Аналогично свет, отразившись от зеркала  $Z_2$  и попавший на зеркало  $Z_1$ , для наблюдателя формирует ещё одно изображение свечи.

Однако третье и четвертое изображения свечи совпадают и сливаются в точке  $S_{3,4}$ .

✓ **Ответ.** Наблюдатель увидит три изображения свечи.

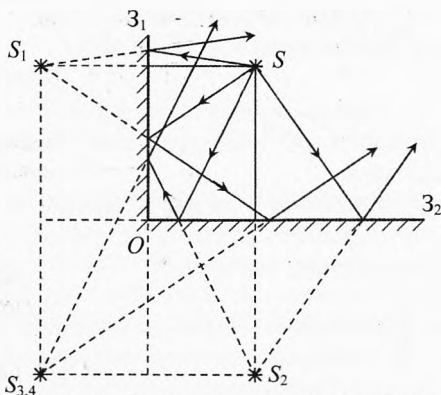


Рис. 8. Изображение от двух взаимно перпендикулярных зеркал

**Примечание.** Этот ответ легко проверить на опыте. Если же немного уменьшить угол между зеркалами, то третье и четвёртое изображения можно будет увидеть раздельно. Если и дальше уменьшать угол между зеркалами, то свет будет многократно отражаться от зеркал и количество изображений будет возрастать почти до бесконечности (когда угол между зеркалами станет равным нулю, а зеркала станут параллельными).

## § 33. Сферические зеркала

Сферическое зеркало представляют собой гладкую отражающую поверхность сегмента сферы радиуса  $R$ .

Центр сферы, из которой вырезано зеркало, называется **оптическим центром** (точка  $O$  на рис. 9).

Если сферическое зеркало положить выпуклой стороной на горизонтальную поверхность, то оно коснется стола в одной точке. Эта точка касания зеркала со столом называется **полюс** (или **вершина**) зеркала (точка  $P$  на рисунке).

**Полюс зеркала** – вершина сферического сегмента.

Линия, соединяющая оптический центр и полюс зеркала, называется **главной оптической осью** зеркала.

Любая другая линия, проведённая через оптический центр, называется **побочной оптической осью**.

Сферические зеркала бывают вогнутые и выпуклые.



Рис. 9. Сферические зеркала

**Вогнутое зеркало.**

Если свет отражается от внутренней стороны сферического зеркала, то это – **вогнутое собирающее свет зеркало** (рис. 10).

Если направить на вогнутое зеркало пучок параксиальных (прилегающих близко к оптической оси) параллельных лучей, то после отражения они соберутся в одной точке, называемой *фокусом зеркала* (для данной оптической оси).

**Фокус зеркала** – точка, в которой пересекутся после отражения в зеркале параксиальные лучи, параллельные выбранной оптической оси.

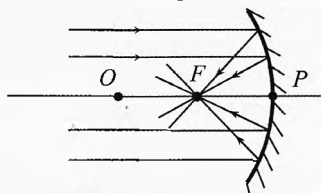


Рис. 10. Вогнутое зеркало

Если пучок света параллелен главной оптической оси, то это – *главный фокус зеркала*. Фокус от лат. *focus* – очаг или огонь, то есть фокус – это средоточие чего-либо, в нашем случае – лучей света.

Расстояние от полюса зеркала до его фокуса называется **фокусным расстоянием**  $F$ .

Ниже будет показано, что фокусное расстояние для сферического зеркала равно половине его радиуса:

$$F = \frac{R}{2}.$$

Для того чтобы характеризовать способность зеркала сжимать пучок лучей вводится скалярная величина: оптическая сила  $D$ . Чем меньше фокусное расстояние зеркала, тем больше у него способность сжимать пучок падающих на него лучей.

**Оптическая сила** – скалярная величина, характеризующая способность зеркала сжимать пучок лучей. Оптическая сила зеркала равна величине, обратной фокусному расстоянию:

$$D_{\text{вогн}} = \frac{1}{F}.$$

Единица измерения оптической силы – диоптрия (от греч. *dioptra* – видящий насквозь) или кратко дптр:

$$[D] = 1 \text{ дптр} = \frac{1}{\text{м}} = \text{м}^{-1}.$$

Оптическая сила – одна диоптрия означает, что вогнутое зеркало сжимает параллельный пучок света так сильно, что, отразившись от него, все параксиальные лучи соберутся на расстоянии 1 м от зеркала.

Если оптическая сила равна 2 дптр, то оно вдвое сильнее: сжимает параллельный пучок лучей так, что после отражения они соберутся на вдвое меньшем расстоянии:  $D = 2 \text{ дптр} = 2 \cdot \frac{1}{\text{м}} = \frac{1}{0,5 \text{ м}}$ .

Фокусное расстояние такого зеркала  $F = 0,5 \text{ м}$ .

### Выпуклое зеркало.

Если свет отражается от внешней стороны зеркала, то это – **выпуклое рассеивающее свет зеркало** (рис. 11).

Если на выпуклое зеркало направить параллельный пучок лучей, то после отражения они будут расходиться (двигаться в виде расширяющегося пучка). Начертив отраженные лучи назад за зеркало, увидим, что продолжения этих лучей пересекутся в одной точке, которую назовем мнимым фокусом.

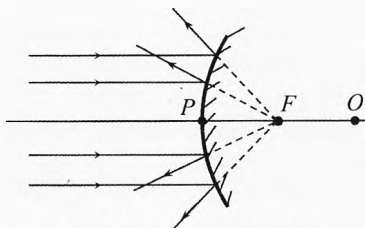


Рис. 11. Выпуклое зеркало

Наблюдателю будет казаться, что лучи расходятся и выходят как бы из точки мнимого фокуса.

Оптическая сила выпуклого зеркала отрицательна, т.к. оно не только не сжимает пучок лучей, а наоборот расширяет его:

$$D_{\text{вып}} = -\frac{1}{F}.$$

Здесь фокусное расстояние берется по модулю.

Оптическая сила плоского зеркала очевидно равна нулю, ибо оно не сжимает и не расширяет пучок лучей, падающих на него.

Таким образом, **оптическая сила зеркала** – это действительное число, равное величине, обратной фокусному расстоянию зеркала:

$$D = \pm \frac{1}{F}.$$

У плоского зеркала фокусное расстояние  $F_{\text{плоск}} = \infty$ , а оптическая сила  $D_{\text{плоск}} = 0$ .

### Формула сферического зеркала.

Пусть точечный источник света  $S$  находится на главной оптической оси дальше от полюса, чем оптический центр (рис. 12). Обозначим расстояние от источника света  $S$  до полюса  $P$  буквой  $d$ :

$$d = SP.$$

Проведём параксиальный (близкий к оси) луч  $SK$  до зеркала:  $SK \approx d$ . Отразившись от зеркала свет пересечёт глав-

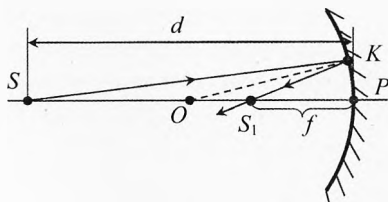


Рис. 12. Вывод формулы сферического зеркала



ную оптическую ось в некоторой точке  $S_1$ . Здесь будет изображение источника, поскольку луч  $SP$ , отразившись в точке  $P$  пойдёт назад тоже по оптической оси и пересечётся с лучом  $KS_1$  в точке  $S_1$ . Обозначим расстояние от зеркала до изображения буквой  $f$ :

$$f = S_1P.$$

Заметим, что для параксиальных лучей  $S_1P \approx S_1K$ .

Отрезок  $OK$  – перпендикулярен поверхности зеркала в точке  $K$  (так как  $OK$  – это радиус сферы). По закону отражения  $\angle SKO = \angle OKS_1$ , значит, отрезок  $OK$  является биссектрисой угла  $\angle SKS_1$ . По теореме о биссектрисе:

$$\frac{SK}{S_1K} = \frac{SO}{OS_1} \quad \text{или} \quad \frac{d}{f} = \frac{d-R}{R-f}$$

$$\Rightarrow d \cdot (R-f) = f \cdot (d-R) \Rightarrow d \cdot R - d \cdot f = f \cdot d - f \cdot R \\ f \cdot R + d \cdot R = 2f \cdot d.$$

Разделив последнее уравнение на  $d \cdot f \cdot R$ , получим **формулу сферического вогнутого зеркала**:

$$\boxed{\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{2}{R}} \quad (2)$$

Если  $d$  устремить к бесконечности, то есть чтобы лучи от источника стали параллельными, расстояние  $f$  от зеркала до изображения станет равным фокусному по определению:

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{F} = \frac{2}{R} \Rightarrow \boxed{F = \frac{R}{2}} \quad (3)$$

Откуда следует, что фокусное расстояние зеркала равно половине радиуса сферы, из которой вырезано это зеркало.

Из (2) и (3) получим каноническое уравнение вогнутого сферического зеркала:

$$\boxed{\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}}$$

В случае вогнутого зеркала все величины ( $d, f, F$ ) действительны, поэтому в уравнении все члены положительны.

Если  $d, f$  или  $F$  мнимые, то перед соответствующей величиной ставится знак минус. Например, у выпуклого зеркала фокус мнимый, поэтому **формула сферического выпуклого зеркала**:

$$\boxed{\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}}$$

\* Канонический – принятый за истинный, твёрдо установленный.

## § 34. Построение изображений в сферическом зеркале

**Вогнутое зеркало.** Построим изображение предмета, расположенного перпендикулярно главной оптической оси вогнутого зеркала. Учтём, что точка фокуса  $F$  находится посередине между оптическим центром  $O$  и полюсом  $P$  (рис. 13).

Луч 1, выходящий из точки  $A$  параллельно главной оптической оси, после отражения от зеркала пойдёт через точку  $F$ .

Луч 2, проходящий через полюс  $P$ , после отражения пойдёт симметрично падающему лучу.

Луч 3, прошедший через точку  $F$ , отразившись от зеркала, пойдёт параллельно главной оптической оси.

Луч 4, идущий через оптический центр, отразится назад.

Все эти четыре характерных луча пересекутся в одной точке  $A_1$ , которая будет изображением точки  $A$ .

Изображение  $A_1B_1$  высотой  $H$  будет перпендикулярно главной оптической оси.

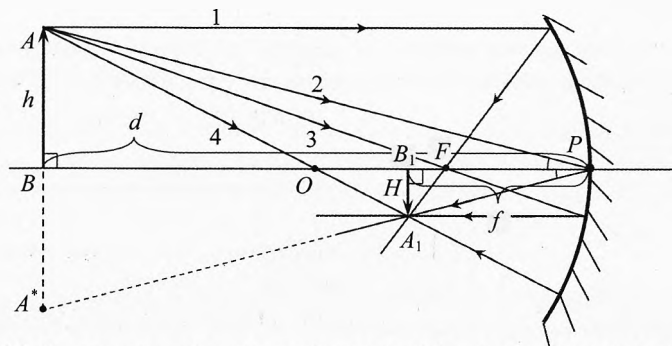


Рис. 13. Изображение предмета, находящегося дальше оптического центра

Отношение высоты изображения  $H$  к высоте предмета  $h$  называется **увеличением зеркала**:

$$\Gamma = \frac{H}{h}$$

В нашем примере увеличение меньше единицы. А само изображение получилось уменьшенное, действительное, перевёрнутое.

Из подобия треугольников  $\triangle ABP = \triangle A_1B_1P$  видно, что

$$\frac{H}{h} = \frac{f}{d},$$

где  $d = BP$  – расстояние от предмета до зеркала,  $f = B_1P$  – расстояние от изображения до зеркала.

Тогда увеличение зеркала можно вычислять по формуле:

$$\Gamma = \frac{f}{d}.$$

Для построения изображения одной точки достаточно построить только два любых луча от этой точки, проведя их так, чтобы в каждом случае угол отражения был равен углу падения. Но удобнее брать два из характерных лучей, описанных выше.

При построении отраженного луча 2 удобно взять точку  $A^*$  зеркальное отражение точки  $A$  и провести отраженный луч  $PA_1A^*$ .

При построении изображений в сферическом зеркале его кривизну надо только слегка обозначать, ибо мы строим изображения только от параксиальных лучей.

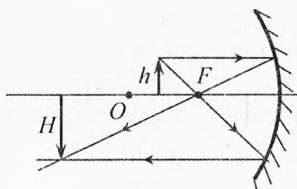


Рис. 14. Предмет между оптическим центром и фокусом

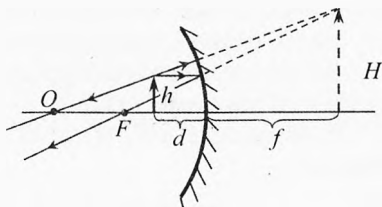


Рис. 15. Предмет между фокусом и полюсом

Если источник находится между оптическим центром и фокусом зеркала, то изображение будет действительным, увеличенным, перевёрнутым (рис. 14). Формула в этом случае будет, как в предыдущем случае:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

Если же предмет находится между фокусом и полюсом, то изображение будет мнимое, прямое, увеличенное (рис. 15). Поэтому в формуле зеркала перед мнимым  $f$  будет стоять минус:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

Если придвинуть предмет вплотную к зеркалу ( $d \rightarrow 0$ ), то изображение будет мнимым, прямым и по размеру почти совпадать с самим предметом (рис. 16):

$$f = \frac{F \cdot d}{F - d} \approx d \rightarrow 0 \Rightarrow \Gamma = \frac{f}{d} \approx 1.$$

В этом случае кривизна зеркала будет незаметна по сравнению с размерами предмета, поэтому зеркало можно рассматривать почти как плоское.

**Выпуклое зеркало.** В случае выпуклого зеркала для действительных предметов все изображения будут мнимыми, уменьшенными, прямыми

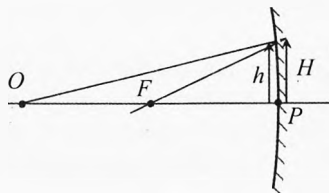


Рис. 16. Предмет вплотную к зеркалу

(рис. 17). В формуле зеркала перед расстоянием  $f$  от изображения до зеркала будет стоять минус. Поскольку выпуклое зеркало не фокусирует пучок света (а наоборот расширяет его), то и перед фокусным расстоянием  $F$  тоже и будет стоять минус:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}.$$

При  $d \rightarrow 0$  (когда предмет находится вплотную к выпуклому зеркалу (рис. 18)), изображение по размерам будет практически совпадать с предметом, и увеличение будет близко к единице  $\Gamma \approx 1$ .

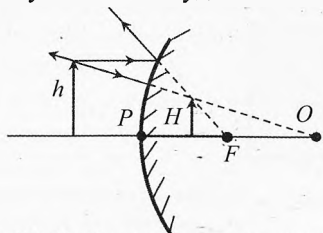


Рис. 17. Изображение в выпуклом зеркале

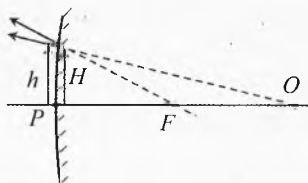


Рис. 18. Предмет вплотную к зеркалу

При перемещении предмета издалека ( $d = \infty$ ) вплоть до выпуклого зеркала ( $d \rightarrow 0$ ) изображение будет перемещаться из мнимого фокуса ( $f = F$ ) до полюса ( $f \rightarrow 0$ ).

✎ **Пример 3.** На рис. 19 изображены предмет  $AB$  и увеличенное вдвое изображение  $A_1B_1$ , расположенные параллельно друг другу. Какое это зеркало? Где находится ось зеркала, оптический центр, главная оптическая ось, фокус?

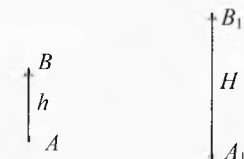


Рис. 19. Восстановить положение зеркала

➔ **Решение.** Поскольку изображение прямое увеличенное, значит это зеркало вогнутое.

Поскольку  $\Gamma = \frac{H}{h}$ , а с другой стороны  $\Gamma = \frac{f}{d}$ , то  $\frac{H}{h} = \frac{f}{d}$ . Значит, соединив начало предмета  $A$  с концом изображения  $B_1$ , а также конец предмета  $B$  с началом изображения  $A_1$ , мы получим точку на оси зеркала (точка  $K$  на рис. 20).

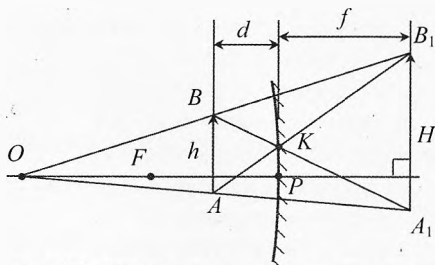


Рис. 20. Восстановление положения зеркала

Поскольку предмет и изображение параллельны друг другу, то главная оптическая ось зеркала перпендикулярна им, а само зеркало параллельно

им. Поэтому нарисуем параллельно предмету и изображению зеркало, проходящее через точку  $K$ .

Соединим начало предмета  $A$  с началом изображения  $A_1$ , и аналогично  $B$  с  $B_1$ . На пересечении этих линий находится оптический центр  $O$  зеркала.

Опустив из точки  $O$  перпендикуляр на предмет и изображение, получим главную оптическую ось зеркала. Эта оптическая ось пересекает зеркало в точке  $P$  (полюс).

Фокус зеркала  $F$  находится посередине между оптическим центром  $O$  и полюсом  $P$  зеркала. ←

✎ **Пример 4.** На рис. 21 изображены предмет  $AB$  и изображение  $A_1B_1$  в сферическом зеркале. Найти построением ось зеркала, оптический центр и главную оптическую ось, фокус.

→ **Решение.** Поскольку изображение увеличенное, то зеркало вогнутое.

Соединив точку  $A$  с точкой  $B_1$  и  $B$  с точкой  $A_1$ , получим на пересечении этих линий точку  $K$ , которая находится на оси зеркала (рис. 22).

Продлив линии  $AB$  и  $A_1B_1$  до пересечения, получим вторую точку  $N$  на оси зеркала.

Соединим точки  $K$  и  $N$ , получим ось зеркала.

Соединим начало предмета  $A$  с началом изображения  $A_1$ , и аналогично  $B$  с  $B_1$ . На пересечении этих линий находится оптический центр  $O$  зеркала.

Проведём перпендикуляр из точки  $O$  на ось зеркала и получим главную оптическую ось зеркала и полюс зеркала  $P$ .

Проведём из точки  $A$  прямую параллельную главной оптической оси. На пересечении с осью зеркала получим точку  $M$ . Этот луч  $AM$  должен отразиться от зеркала и попасть в фокус. Поэтому проведём прямую  $A_1M$ . Эта линия пересечёт главную оптическую ось в фокусе зеркала  $F$ . Если всё построено правильно, то фокус должен получиться ровно посередине отрезка  $OP$ .

Аналогично можно решить задачу для выпуклого зеркала. ←

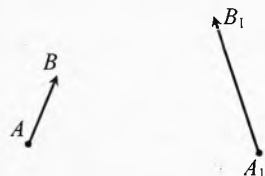


Рис. 21. Восстановить положение зеркала

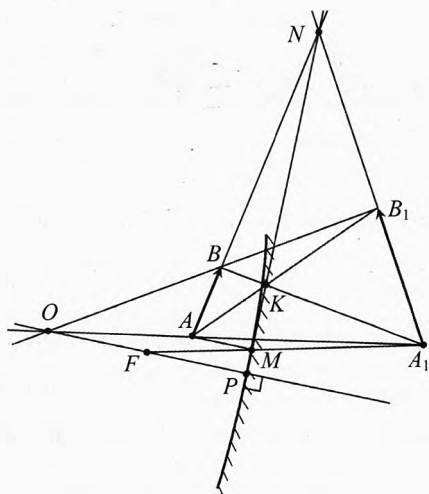


Рис. 22. Восстановление положения зеркала

## § 35. Преломление на плоской поверхности

При взгляде на свой стакан с живительной жидкостью кажется, что тебе налили меньше, чем соседу, стакан которого виден сбоку. Почему?

Дело в том, что из-за преломления света дно визуально как бы приподнимается и кажущаяся глубина меньше, чем на самом деле (например, при взгляде сбоку). Произведём расчёт «уменьшения» толщины слоя жидкости.

Пусть наблюдатель рассматривает точку  $C$  на дне стакана (рис. 23).

Луч  $CA$ , идущий вертикально вверх, пройдёт перпендикулярно через поверхность воды и не преломится.

Луч  $CB$ , идущий в воде под малым углом  $\alpha$  к вертикали, преломляется на границе вода–воздух и дальше идёт под углом  $\beta$  к вертикали в соответствии с законом преломления света:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n}.$$

Для малых\* углов синус угла, тангенс угла и сам угол в радианной мере примерно равны друг другу:

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha.$$

Поэтому,

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} \approx \frac{1}{n}.$$

Если продолжить пунктиром этот преломлённый луч назад в воду до пересечения с  $CA$ , то получим точку  $D$  – изображение точки  $C$  с точки зрения наблюдателя. То есть наблюдателю кажется, что дно находится не на глубине  $h$ , а на глубине  $H$ :

$$AB = h \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad AB = H \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Сравнивая с предыдущим уравнением, получим:

$$H \operatorname{tg} \beta = h \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow H = h \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} \Rightarrow \boxed{H \approx \frac{h}{n}}.$$

Таким образом, видимая толщина слоя жидкости уменьшается в  $n$  раз. В случае воды  $n = \frac{4}{3}$ ,  $H = 0,75h$ . То есть видимая глубина воды в стакане составляет три четверти от реальной, уменьшение составляет 25%.

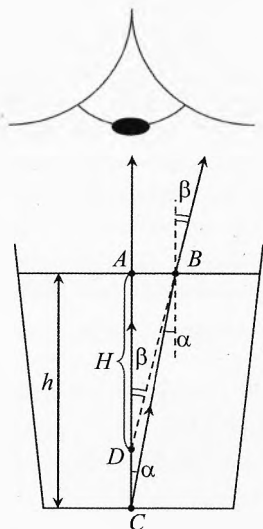


Рис. 23. Оптическое приближение дна стакана

\* Например, для  $\alpha = 20^\circ$ :  $\alpha = 0,349$ ,  $\sin \alpha = 0,342$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 0,364$ , отличие в пределах 6,4%. Для  $\alpha = 10^\circ$  отличие около 1,5%.

## § 36. Преломление на сферической поверхности

Наблюдая плоский аквариум с рыбами, замечаем, что глубина его кажется меньше, чем на самом деле. Также кажется, что и ширина аквариума меньше и рыбки тоньше. Всё это обусловлено преломлением света.

А вот в сферическом аквариуме рыбы кажутся расположенными дальше и выглядят крупнее, чем на самом деле.

Произведём расчёт для преломления на сферической поверхности для параксиальных лучей.

Пусть источник света  $S$  находится на расстоянии  $d$  от сферической поверхности (рис. 24). Показатель преломления второй среды относительно первой:

$$n = \frac{n_2}{n_1}.$$

Рассмотрим два луча, исходящих из точки  $S$ : один идёт по центральной оси  $SO$ , а второй — под малым углом  $\gamma$  к оси.

Луч  $SO$  перпендикулярен поверхности сферы, поэтому пройдёт без преломления.

Второй луч  $SK$  преломится на сферической границе раздела двух сред. И пусть преломлённый луч  $KS_1$  вновь пересечёт ось сферы в точке  $S_1$ . Тогда в этой точке  $S_1$  будет действительное изображение источника  $S$  на расстоянии  $f$  от преломляющей поверхности сферы.

Из рисунка видно углы  $\alpha$  и  $\varphi$  являются внешними в треугольниках  $SKO$  и  $S_1KO$ , поэтому:

$$\alpha = \gamma + \varphi, \quad (4)$$

$$\varphi = \beta + \delta. \quad (5)$$

Из закона преломления следует, что:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \Rightarrow \alpha \approx n\beta. \quad (6)$$

Подставляя в (4)  $\alpha$  из (6), а затем  $\beta$  из (5), получим:

$$n\beta = \gamma + \varphi, \quad n(\varphi - \delta) = \gamma + \varphi, \Rightarrow \varphi(n - 1) = \gamma + n\delta.$$

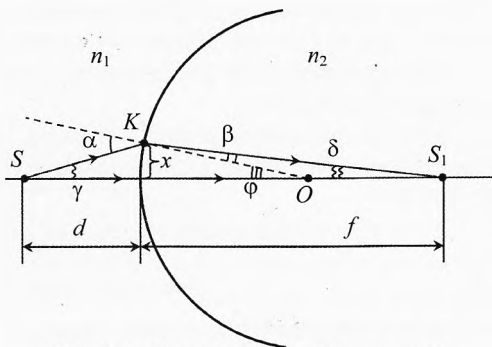


Рис. 24. Преломление на сферической поверхности

\* Если источник  $S$  приблизить близко к сфере, то преломлённый луч  $KS_1$  может не пересечь ось сферы. В этом случае луч  $KS_1$  придется продлить пунктиром назад в первую среду до пересечения с осью и изображение  $S_1$  будет мнимым.

Для малых углов:  $\gamma = \frac{x}{d}$ ,  $\varphi = \frac{x}{R}$ ,  $\delta = \frac{x}{f}$ , поэтому:

$$\frac{(n-1)}{R} = \frac{1}{d} + \frac{n}{f} \quad (7)$$

Мы получили формулу для преломления света на одной сферической поверхности для частного случая, когда  $n > 1$ .

**Пример 5.** Найти расстояние  $f$  до изображения от сферической границы раздела двух сред радиусом  $R = 4$  см, если расстояние до неё от предмета  $d = 20$  см. Предмет находится в воздухе, а изображение в воде ( $n = 1,33$ ).

**Решение.**  $\frac{(n-1)}{R} = \frac{1}{d} + \frac{n}{f} \Rightarrow f = \frac{n}{\frac{(n-1)}{R} - \frac{1}{d}} \approx 41$  см.

Получилось, что изображение сфокусируется на расстоянии, значительно превышающем радиус поверхности.  $\leftarrow$

✓ **Ответ.** После преломления лучи сфокусируются на расстоянии 41 см от сферической границы раздела двух сред.

**Пример 6.** В сферическом аквариуме с водой ( $n = 4/3$ ) плавает в самой дальней точке от наблюдателя маленькая рыбка. На каком расстоянии  $f$  от передней поверхности наблюдатель увидит рыбку? Каково будет увеличение размеров рыбки? Радиус аквариума  $R = 20$  см. Стенки аквариума считать тонкими.

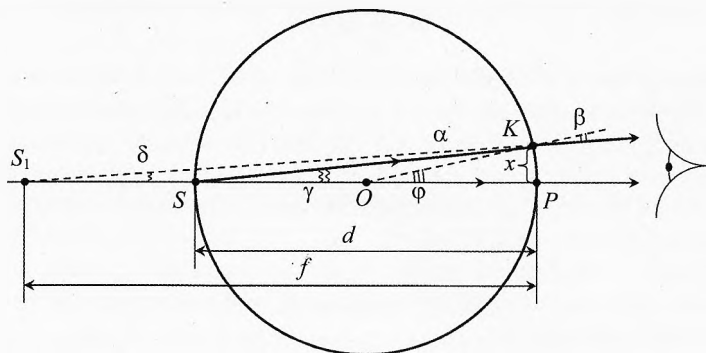


Рис. 25. Визуальное отдаление и увеличение рыбки

**Решение.** Преломлением на границе вода–стекло и стекло–вода пренебрежём, т.к. толщина стенок аквариума равномерная, а толщина стенок небольшая, поэтому суммарное преломление на стекле будет практически



незаметно. Поэтому преломление будем считать как бы на границе вода–воздух:

$$\alpha n \approx \beta.$$

Угол  $\varphi$  – внешний угол треугольников  $\Delta SKO$  и  $\Delta S_1KO$ , значит (рис. 25):

$$\varphi = \alpha + \gamma, \quad \varphi = \beta + \delta,$$

Подставляя  $\alpha$  из второго уравнения в первое, а затем получившееся выражение для  $\beta$  – в третье уравнение, получим:

$$\varphi = (\varphi - \gamma) n + \delta \Rightarrow \varphi \cdot (n - 1) = n\gamma - \delta,$$

Учитывая, что  $\gamma = \frac{x}{d}$ ,  $\varphi = \frac{x}{R}$ ,  $\delta = \frac{x}{f}$ , получим\*:

$$\frac{x}{R} \cdot (n - 1) = n \cdot \frac{x}{d} - \frac{x}{f} \Rightarrow \frac{(n - 1)}{R} = \frac{n}{d} - \frac{1}{f}.$$

Тогда расстояние от передней стенки аквариума до мнимого изображения:

$$f = \frac{1}{\frac{n}{d} - (n - 1)}$$

Учитывая, что в нашем случае  $d = 2R$ ,  $n = 4/3$  получим:

$$f = \frac{1}{\frac{1}{2R} - \frac{1}{3}} = \frac{2R}{n - 2(n - 1)} = \frac{2R}{2 - n} = 3R = 60 \text{ см.}$$

Увеличение можно посчитать, как отношение расстояния  $S_1O$  от изображения до оптического центра к расстоянию  $SO$  от рыбки до оптического центра:

$$\Gamma = \frac{S_1O}{SO} = \frac{2R}{R} = 2.$$

Если посчитать увеличение по формуле  $f/d$ , как в сферическом зеркале, то получится неверный ответ, т.к. в зеркале падающий и отражённый луч идут в одной и той же среде и угол падения равен углу отражения, а в случае аквариума среды разные и луч, падающий на полюс  $P$ , преломляется. Постройте на рисунке луч, проходящий через оптический центр  $O$ ? и получите выражение для увеличения. ←

✓ **Ответ.** Изображение рыбки будет увеличенным в 2 раза, и наблюдателю будет казаться, что рыбка располагается на расстоянии  $3R$  от передней поверхности аквариума.

---

\* Эта формула вполне похожа на формулу (7), особенно если учесть, что изображение получилось мнимое (перед  $f$  поставить минус), показатель второй среды (воздуха) относительной первой (воды) равен  $1/n$ , и что кривизна поверхности теперь в другую сторону ( $R$  заменить на  $-R$ ).

## § 37. Формула толстой и тонкой линзы

**Линза** (от лат. *lens* – чечевица) – деталь из оптически прозрачного однородного материала, ограниченная двумя полированными преломляющими поверхностями вращения, например, сферическими или плоской и сферической.

В качестве материала линз обычно используются оптические материалы, такие как стекло, оптическое стекло, оптически прозрачные пластмассы и другие материалы.

**Формула толстой линзы.** Толщина толстой линзы одного порядка или больше радиусов кривизны  $R_1$  и  $R_2$  её боковых поверхностей (рис. 26).

Пусть показатель преломления материала линзы по сравнению с окружающей средой равен  $n$ .

Изобразим два луча, исходящих от источника  $S$ , находящегося на расстоянии  $d$  от первой сферической поверхности.

Первый луч пусть пройдёт через центры  $O_1$  и  $O_2$  обеих поверхностей. Этот луч пройдёт без преломления.

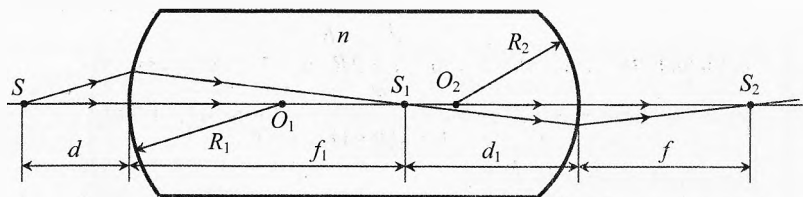


Рис. 26. Построение изображения в толстой линзе

Второй, параксиальный, луч после преломления на первой поверхности даст на пересечении с первым лучом изображение  $S_1$  на расстоянии  $f_1$  от первой сферической поверхности.

С другой стороны это изображение  $S_1$  является источником света для второй сферической поверхности. Пусть после преломления на ней получится действительное изображение  $S_2$  на расстоянии  $f$  за второй сферической поверхностью.

Найдём связь между  $d$  и  $f$ . Запишем формулу (7) для преломления на первой сферической поверхности:

$$\frac{(n-1)}{R_1} = \frac{1}{d} + \frac{n}{f_1}. \quad (8)$$

Для преломления на второй поверхности воспользуемся обратимостью хода лучей. А именно, если свет, проходя от источника  $S_1$ , даёт изображение в точке  $S_2$ , то при обратном ходе свет из точки  $S_2$  даст изображение  $S_1$ . Значит в той же формуле нужно поменять местами  $d$  и  $f$ :

$$\frac{(n-1)}{R_2} = \frac{1}{f} + \frac{n}{d_1}. \quad (9)$$

Складывая два последних уравнения, получим:

$$(n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} + n\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}\right).$$

Толщина линзы равна  $L = f_1 + d_1$ , значит **формула толстой линзы**:

$$(n-1) \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} + n \cdot \left( \frac{1}{d_1} + \frac{1}{L - d_1} \right). \quad (10)$$

**Формула тонкой линзы.** Рассмотрим тонкую линзу, ширина которой  $L$  во много раз меньше радиусов кривизны поверхностей, а значит существенно меньше  $d_1$  и  $f_1$ . Тогда формула (10) примет вид:

$$(n-1) \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \approx \frac{1}{d} + \frac{1}{f} + n \cdot \left( \frac{1}{d_1} + \frac{1}{0 - d_1} \right).$$

Итак, **формула тонкой линзы**:

$$(n-1) \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}. \quad (11)$$

Если направить на линзу пучок параксиальных параллельных лучей, то после преломления в линзе они соберутся в одной точке, называемой **фокусом линзы** (рис. 27).

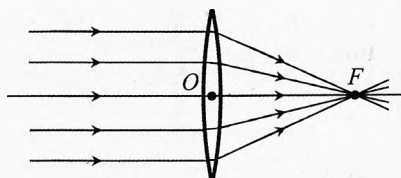


Рис. 27. Фокус тонкой линзы

Расстояние от линзы до фокуса называется **фокусным расстоянием  $F$** .

То есть если устремить  $d \rightarrow \infty$ , то  $f \rightarrow F$ . Тогда:

$$(n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{F}$$

или

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \quad (12)$$

Поставляя (12) в (11) получим каноническую формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

Оптическая сила тонкой линзы:

$$D = \frac{1}{F} \quad \text{или} \quad D = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Откуда видно, что оптическая сила тонкой линзы зависит от показателя преломления материала линзы относительно окружающей среды  $n = \frac{n_a}{n_{cp}}$ , а также от радиусов кривизны её поверхностей. Чем меньше радиусы кривизны, то есть чем более выпуклая линза, тем оптическая сила больше.

Если данная сферическая поверхность линзы обращена к среде, то поверхность выпуклая, то её радиус берется со знаком «+». А если поверхность вогнутая, то со знаком «-».

Линза называется **выпуклой**, если её середина толще краев.

Стеклянная выпуклая линза и в воздухе, и в воде будет собирающей или положительной, то есть оптическая сила или способность сжимать (фокусировать) пучки света будет больше нуля ( $D > 0$ ).

Линза называется **вогнутой**, если её середина тоньше краев.

Стеклянная вогнутая линза и в воздухе, и в воде будет рассеивающей или отрицательной ( $D < 0$ ).

В школах имеются наливные линзы. Если в такую выпуклую линзу не наливать воды (оставить воздух) и опустить в жидкость, то в формуле для оптической силы коэффициент  $(n - 1)$  будет отрицательный. И линза будет рассеивающей. Но если в эту же линзу налить воды, то в воздухе такая линза будет положительной.

Вогнутая воздушная линза в воде будет собирающей.

Воздушный пузырек в воде рассеивает свет, потому что это выпуклая линза, но показатель преломления такой воздушной линзы меньше, чем у воды.

**Формула тонкой линзы в разных средах.** Рассмотрим тонкую линзу из материала с показателем преломления  $n$ . Пусть с одной стороны от линзы находится среда с показателем преломления  $n_1$ , а с другой – с показателем преломления  $n_2$  (рис. 28)

Учитывая, что в формулах (8) и (9) использован показатель преломления линзы по отношению к среде, перепишем эти формулы:

$$\frac{(n/n_1 - 1)}{R_1} = \frac{1}{d} + \frac{n/n_1}{f_1},$$

$$\frac{(n/n_2 - 1)}{R_2} = \frac{1}{f} + \frac{n/n_2}{d_1}$$

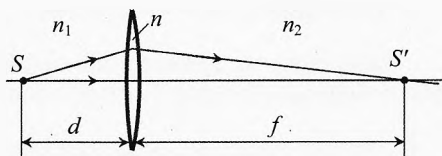


Рис. 28. Тонкая линза в разных средах

Умножая первое уравнение на  $n_1$ , а второе на  $n_2$ , получим:

$$\frac{(n-n_1)}{R_1} = \frac{n_1}{d} + \frac{n}{f_1}, \quad \frac{(n-n_2)}{R_2} = \frac{n_2}{f} + \frac{n}{d_1}.$$

Поскольку толщиной тонкой линзы можно пренебречь, то есть  $f_1 + d_1 = L \approx 0$ , значит  $f_1 \approx -d_1$ . Тогда складывая два предыдущих уравнения, получим формулу тонкой линзы в общем случае:

$$\frac{(n-n_1)}{R_1} + \frac{(n-n_2)}{R_2} = \frac{n_1}{d} + \frac{n_2}{f}.$$

Для тонкой линзы, находящейся в воздухе ( $n_1 = n_2 = 1$ ), эта формула приобретает вид формулы (11), полученной ранее.

### § 38. Построение изображений в тонких линзах

**Собирающая линза.** Перпендикулярно оси линзы через её середину проведём главную оптическую ось (рис. 29).

На одинаковых расстояниях слева и справа от оси линзы обозначим фокусы  $F_1$  и  $F_2$ .

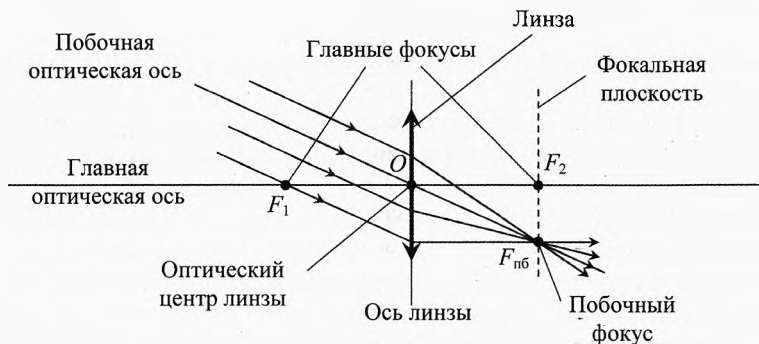


Рис. 29. Параллельный пучок собирается в фокальной плоскости собирающей линзы

Если на собирающую линзу параллельно её главной оптической оси падает пучок лучей, то после преломления в линзе они соберутся в **главном фокусе линзы F**.

Любая прямая, проходящая через оптический центр линзы называется **побочной оптической осью**.

Если пустить пучок лучей параллельных побочной оптической оси, то они соберутся в фокусе  $F_{пб}$  этой побочной оси.

Фокусы побочных осей находятся в **фокальной плоскости**, проходящей через главный фокус линзы перпендикулярно главной оптической оси.

✎ **Пример 7.** На рис. 30 представлен луч  $AB$ . Изобразить его направление после прохождения через собирающую линзу.

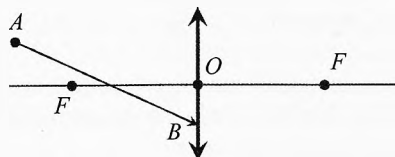


Рис. 30. Продолжить ход луча

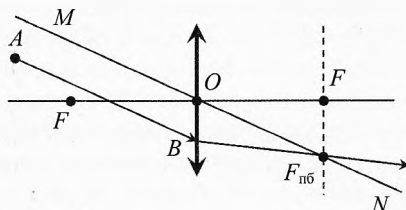


Рис. 31. Построение луча в собирающей линзе

✎ **Решение.** Проведём через точку  $O$  побочную оптическую ось параллельно лучу  $AB$  (рис. 31). Нарисуем фокальную плоскость, то есть проведём перпендикуляр к главной оптической оси в точке  $F$ . Отметим точку  $F_{пб}$  на пересечении побочной оптической оси  $MN$  с фокальной плоскостью. Соединив точку  $B$  с точкой  $F_{пб}$ , получим направление распространения света для луча  $AB$  после преломления в линзе. ✎

**Рассеивающая линза.** Если на рассеивающую линзу параллельно её главной оптической оси падает параллельный пучок лучей, то после преломления в линзе лучи будут расходиться (рис. 32). Их продолжения при взгляде с другой стороны пересекутся в главном мнимом фокусе. То есть наблюдателю будет казаться, что расходящийся пучок лучей выходит как бы из фокуса.

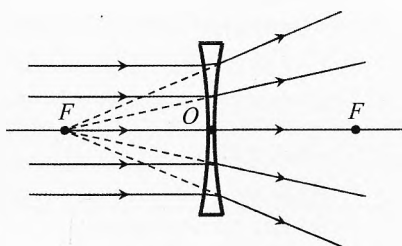


Рис. 32. Фокус рассеивающей линзы

✎ **Пример 8.** Указать направление луча  $AB$  после преломления в рассеивающей линзе (рис. 33).

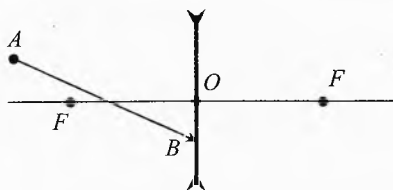


Рис. 33. Продолжить ход луча

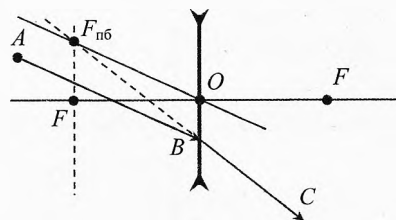


Рис. 34. Построение луча в рассеивающей линзе

✎ **Решение.** Проведём через точку  $O$  побочную оптическую ось параллельно лучу  $AB$  (рис. 34).

Перпендикулярно главной оптической оси линзы проведём через левый фокус фокальную плоскость, и на её пересечении с побочной осью получим побочный фокус  $F_{\text{пб}}$ .

Соединив пунктиром точку  $F_{\text{пб}}$  с точкой  $B$ , получим направление  $BC$ , в котором пойдёт луч  $AB$  после преломления в линзе. ←

**Изображение светящейся точки, находящейся на оптической оси линзы.** Для построения изображения точки  $A$ , находящейся на главной оптической оси линзы необходимо провести *характерные лучи*.

Провести произвольный луч  $AK$  из точки  $A$  до линзы. Провести через точку  $O$  побочную оптическую ось параллельно лучу  $AK$ .

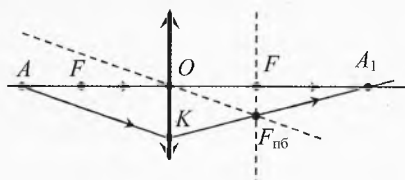


Рис. 35. Изображение точки на оси собирающей линзы

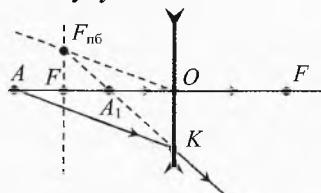


Рис. 36. Изображение точки на оси рассеивающей линзы

В случае собирающей линзы (рис. 35) луч  $AK$  преломится в линзе так, что пересечётся с побочной осью в точке  $F_{\text{пб}}$  в дальней фокальной плоскости. В случае рассеивающей линзы (рис. 36) продолжение луча  $AK$  пересечётся с побочной осью в фокальной плоскости.

Второй луч  $AO$  (который идёт по главной оптической оси) пройдёт через линзу без преломления.

На пересечении линии  $KF_{\text{пб}}$  с главной оптической осью линзы (то есть со вторым лучом  $AO$ ) будет искомое изображение – точка  $A_1$ .

**Изображение светящейся точки, находящейся не на оптической оси линзы.** Для построения изображения светящейся точки в тонкой линзе используются *характерные лучи* (рис. 37 и 38).

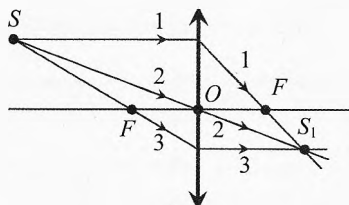


Рис. 37. Изображение точки не на оси собирающей линзы

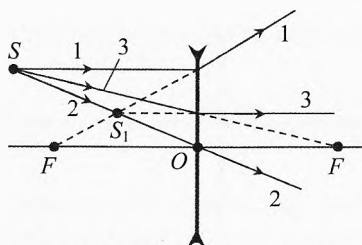


Рис. 38. Изображение точки не на оси рассеивающей линзы

1. Луч параллельный главной оптической оси после преломленияйдёт через дальний фокус (в случае рассеивающей линзы наблюдателю будет казаться, что после преломлённый луч вышел из первого фокуса).

2. Луч, проходящий через оптический центр линзы, не преломляется (луч после линзы идёт в том же направлении).

3. Луч, проходящий через первый фокус собирающей линзы, после преломления в линзе пойдёт параллельно главной оптической оси (в случае рассеивающей линзы луч, направленный на дальний фокус, после преломления будет идти параллельно главной оптической оси линзы).

Все эти лучи и множество других лучей от точечного источника  $S$  пересекаются в точке  $S_1$ , являющейся изображением источника в линзе.

Для построения изображения необходимо построить хотя бы два луча.

**Изображение светящегося вертикального предмета.** Для построения светящегося плоского предмета, расположенного параллельно оси линзы (то есть перпендикулярно главной оптической оси) достаточно построить изображение одного верхнего (нижнего) конца тела, если второй конец тела находится на главной оптической оси. Если же оба конца тела находятся не на главной оптической оси, то строить нужно обе крайние точки тела.

Если предмет расположен перпендикулярно главной оптической оси, то его изображение также будет перпендикулярно главной оптической оси.

✎ **Пример 9.** Пусть тело высотой  $h$  находится на расстоянии  $d$  от собирающей линзы, лежащем в интервале  $d \in (F; 2F)$ , например,  $d = 1,5 \cdot F$ . Построить изображение тела.

✎ **Решение.** Проведём от точки  $B$  луч параллельный главной оптической оси, после преломления в линзе он пройдёт через дальний фокус  $F$  (рис. 39).

Второй луч пустим через оптический центр  $O$  линзы, он пройдёт через линзу без отклонения.

На пересечении этих лучей получим изображение  $B_1$  точки  $B$ . Опустим из точки  $B_1$  перпендикуляр на главную оптическую ось линзы и получим изображение  $A_1B_1$  предмета.

Если построения произведены качественно, то расстояние  $f$  от линзы до изображения должно совпасть с расчётным по формуле тонкой линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{F \cdot d}{d - F}, \quad f = \frac{F \cdot 1,5F}{1,5F - F} = 3F.$$

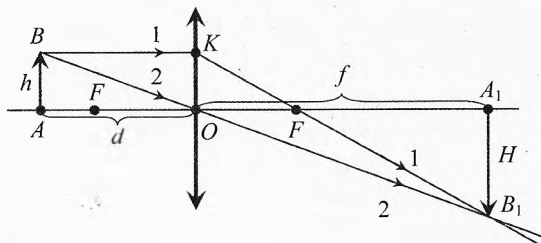


Рис. 39. Построение изображения в собирающей линзе



Как видно из рисунка изображения в этом случае получилось действительным перевёрнутым увеличенным. ◀

**Линейное увеличение**  $\Gamma$  равно отношению высоты изображения  $H$  к высоте предмета  $h$ . Оно показывает, во сколько раз высота изображения больше высоты предмета (рис. 39):

$$\Gamma = \frac{H}{h}.$$

Из подобия треугольников  $\triangle ABO$  и  $\triangle A_1B_1O$  следует:

$$\frac{H}{h} = \frac{f}{d}. \quad (13)$$

То есть увеличение можно вычислить и по формуле:

$$\Gamma = \frac{f}{d}.$$

Из подобия треугольников  $\triangle OKF$  и  $\triangle A_1B_1F$  следует:

$$\frac{H}{h} = \frac{f - F}{F}. \quad (14)$$

Сравнивая (13) и (14), получим **формулу тонкой собирающей линзы**:

$$\frac{f}{d} = \frac{f - F}{F} \Rightarrow f \cdot F = d \cdot f - d \cdot F. \quad (15)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

Это – простейший случай, когда все величины  $d, f, F$  положительные (действительные). Для положительной (собирающей) линзы так будет при расстоянии от предмета до линзы  $d \in (F; \infty)$ .

Если предмет находится от линзы дальше, чем двойной фокус ( $d > 2F$ ), то изображение получится тоже действительным перевёрнутым, но уменьшенным.

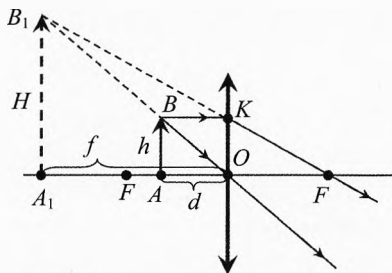


Рис. 40. Увеличение в собирающей линзе

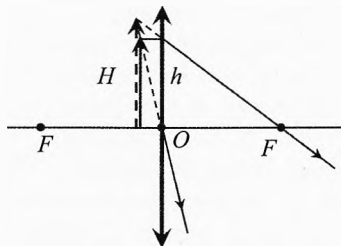


Рис. 41. При приближении к линзе увеличение устремится к единице

Если же предмет находится ближе к линзе, чем главный фокус  $d < F$ , то изображение получится мнимым, прямым увеличенным (рис. 40).

Действительно, из подобия треугольников  $\triangle ABO$  и  $\triangle A_1B_1O$  следует:

$$\frac{H}{h} = \frac{f}{d}.$$

Из подобия треугольников  $\triangle OKF$  и  $\triangle A_1B_1F$ :

$$\frac{H}{h} = \frac{f + F}{F}.$$

Из этих двух выражений получим формулу линзы для этого случая:

$$\frac{f}{d} = \frac{f + F}{F} \Rightarrow f \cdot F = d \cdot f + d \cdot F$$

$$\Rightarrow \frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f}.$$

Эта формула отличается от формулы (15) только тем, что перед  $f$  поставлен знак «-», так как изображение получилось мнимое. Если же рассчитать  $f$  из (15), то ответ получится отрицательный.

Если приблизить предмет вплотную к линзе ( $d \rightarrow 0$ ), то изображение тоже будет приближаться к линзе:  $f \rightarrow 0$ , а увеличение будет стремиться к единице (рис. 41).

**Пример 10.** Построить изображение предмета перпендикулярного главной оптической оси рассеивающей линзы.

→ **Решение.** В случае рассеивающей линзы изображение действительно-го предмета будет мнимым уменьшенным прямым при любом раскладе (рис. 42).

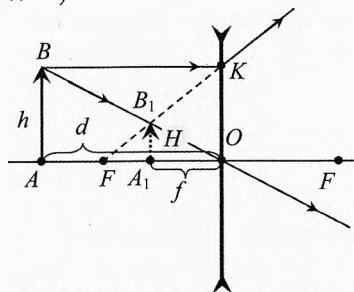


Рис. 42. Построение изображения в рассеивающей линзе

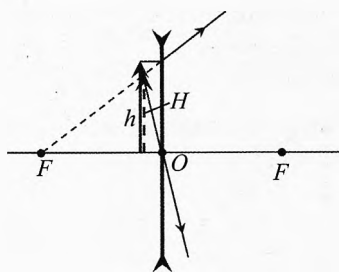


Рис. 43. При приближении к линзе увеличение устремится к единице

Из подобия треугольников  $\triangle ABO$  и  $\triangle A_1B_1O$  следует:  $\frac{H}{h} = \frac{f}{d}.$

Из подобия треугольников  $\triangle OKF$  и  $\triangle A_1B_1F$ :  $\frac{H}{h} = \frac{F - f}{F}.$

Из этих двух уравнений:  $\frac{f}{d} = \frac{F-f}{F} \Rightarrow f \cdot F = d \cdot F - d \cdot f$   
 $\Rightarrow \frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}.$

Из последней формулы видно, что в данном случае фокус тоже мнимый, поэтому перед ним ставится знак «-».

Если приближать предмет к рассеивающей линзе, то изображение будет стремиться к линзе, оставаясь между предметом и линзой, а увеличение будет стремиться к единице (рис. 43). ←

**Пример 11.** На рис. 44 изображены предмет  $AB$  и изображение  $A_1B_1$  в тонкой линзе. Какая эта линза? Найти построением ось линзы, оптический центр и главную оптическую ось, фокусы.

**Решение.** Поскольку изображение оказалось прямым увеличенным, то это – собирающая линза (рис. 45).

Проведём линии через точки  $A$  и  $A_1$ , а также через  $B$  и  $B_1$ . На пересечении этих линий будет точка  $O$  – оптический центр линзы.

На пересечении линий  $AB$  и  $A_1B_1$  будет точка  $C$ , которая находится на оси линзы.

Проведём линию  $CO$  – ось линзы. Перпендикуляром к ней в точке  $O$  будет главная оптическая ось линзы  $FOF$ .

Опустим перпендикуляр из точки  $A$  на ось линзы, то есть луч  $AK$ , параллельный главной оптической оси. После

преломления он пойдёт по направлению дальнего фокуса. Чтобы найти это направление, проведём линию через точки  $K$  и  $A_1$  (изображение точки  $A$ ). На пересечении линии  $A_1K$  с главной оптической осью линзы находится дальний фокус  $F$ . Симметрично ему строим передний фокус линзы. ←

**Примечание.** Не стоит удивляться, что линза расположена не вертикально, а главная оптическая ось – не горизонтально. Автор задачи вполне может расположить предмет и изображение так, как ему захочется.

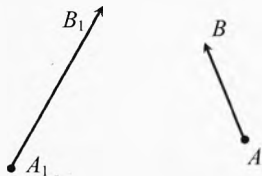


Рис. 44. Восстановить положение линзы

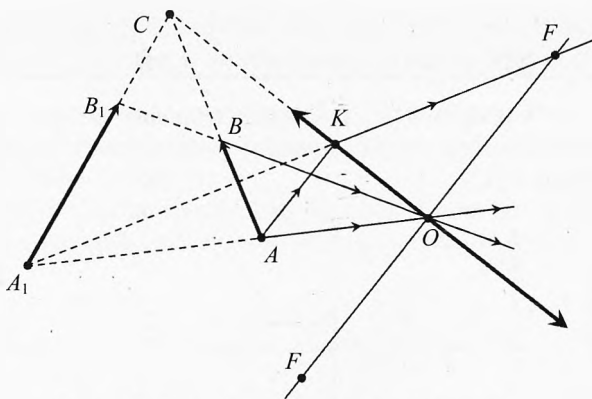


Рис. 45. Восстановление положения линзы

✎ **Пример 12.** Построить изображение предмета  $AB$ , расположенного наклонно к главной оптической оси собирающей линзы.

➔ **Решение.** Для получения изображения достаточно от точек  $A$  и  $B$  построить по два характерных луча (рис. 46).

Мы построили по три луча, чтобы убедиться, что рисунок построен достаточно качественно, и что третий луч тоже пройдет через точку пересечения двух первых лучей. Это было особенно важно при построении точки  $A_1$ , так как от точки  $A$  все лучи идут под малыми углами к оптической оси и погрешность построений может быть большой.

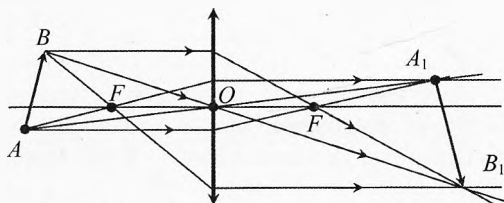


Рис. 46. Изображение наклонённой стрелки

При решении задач на построение изображений важно пользоваться хорошей линейкой и очень аккуратно чертить линии даже в черновике.

Так если луч через точки  $A$  и  $O$  будет сдвинут всего на 1 мм, то из-за такой погрешности точка  $A_1$  может сместиться на несколько сантиметров.

## § 39. Система линза – зеркало

Пусть плоская сторона плоско-выпуклой линзы является зеркальной, радиус другой стороны равен  $R$  (рис. 47). Чему равно фокусное расстояние этой зеркальной линзы? На каком расстоянии  $f$  от неё получится изображение точки, расположенной на главной оптической оси на расстоянии  $d = 1,5R$  от линзы?

Свет, падающий от источника на линзу, преломляется на сферической поверхности, затем отражается от плоской зеркальной поверхности

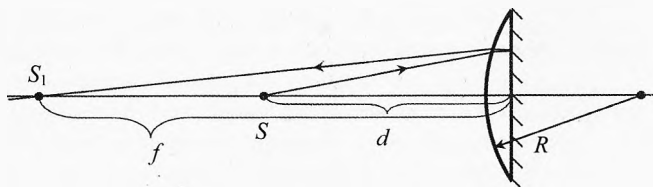


Рис. 47. Система линза – зеркало

и вновь преломляется на сферической поверхности. Оптическая сила линзы-зеркала будет такой же, как от двояковыпуклой линзы, только из-за отражения изображение будет с той же стороны, что и предмет:

$$D = (n-1) \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{2(n-1)}{R}.$$

Если показатель преломления линзы  $n = 1,5$ , а радиус кривизны  $R = 10$  см:

$$D = \frac{2(1,5-1)}{0,1 \text{ м}} = 10 \text{ м}^{-1}, \quad F = \frac{1}{D} = 0,1 \text{ (м)} = 10 \text{ (см)}.$$

Найдём расстояние от линзы, на котором получится изображение  $S_1$ :

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{d} \Rightarrow f = \frac{F \cdot d}{d - F} = \frac{0,1 \cdot 0,15}{0,15 - 0,1} = 0,3 \text{ (м)} = 30 \text{ (см)}.$$

Это изображение будет действительное, но находится будет с той же стороны зеркальной линзы, что и сам источник (рис. 47). Для сравнения взгляните на ход аналогичного луча через двояковыпуклую линзу (рис. 48).

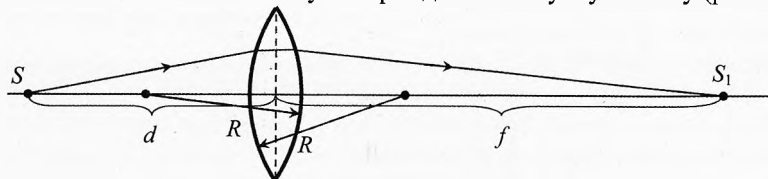


Рис. 48. Двояковыпуклая линза

Если зеркальной является сферическая поверхность линзы (рис. 49), то свет дважды проходит через линзу (дважды преломляется в ней) и один раз отражается от зеркала, поэтому оптическая сила этой системы складывается из оптической силы зеркала и двойной оптической силы линзы:

$$D = D_z + 2 \cdot D_n.$$

Если зеркало плоское (как было в предыдущем случае), то  $D_z = 0$ , тогда:  $D = 2 \cdot D_n$ .



Рис. 49. Двояковыпуклая линза с зеркальным покрытием

## § 40. Система соосных линз

Найдём формулу для оптической силы системы линз, находящихся на одной главной оптической оси, в зависимости от расстояния между линзами.

Для простоты рассмотрим случай действительного изображения в собирающих линзах, но ответ будет такой же и для мнимых изображений и даже для рассеивающих линз, главное не забыть, что для мнимого источника, мнимого изображения и мнимого фокуса берутся со знаком «-».

Пусть светящийся предмет  $AB$  высотой  $h$  находится на расстоянии  $d$  от первой линзы, причём  $d > F_1$ . Его действительное изображение  $A_1B_1$  высотой  $H$  окажется на расстоянии  $f_1$  от оптического центра первой линзы  $O_1$  (рис. 50).

Расстояние между линзами  $l$ :

$$l = f_1 + d_2, \quad (16)$$

где  $d_2$  – расстояние от изображения в первой линзе до второй линзы.

Изображение  $A_1B_1$  в первой линзе является как бы предметом для второй линзы. Изображение  $A_2B_2$ , даваемое системой линз, получится на некотором расстоянии  $f$  за второй линзой.

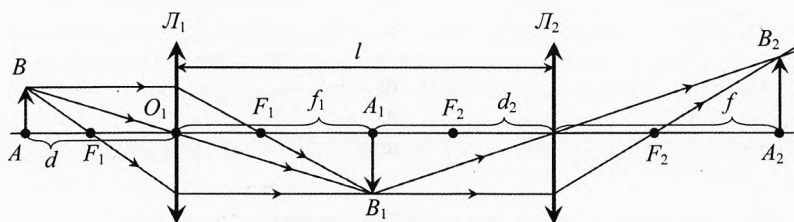


Рис. 50. Система соосных линз

Формула тонкой линзы для каждой линзы:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_1}, \quad (17)$$

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F_2}. \quad (18)$$

Выразим  $f_1$  из (17) и, подставляя в (16), найдём  $d_2$ :

$$f_1 = \frac{d \cdot F_1}{d - F_1} \Rightarrow d_2 = l - \frac{d \cdot F_1}{d - F_1}.$$

Подставляя  $d_2$  в (18), получим формулу для системы двух соосных тонких линз:

$$\frac{1}{l - \frac{d \cdot F_1}{d - F_1}} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F_2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{l - \frac{F_1}{1 - \frac{F_1}{d}}} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F_2}}.$$

Если на первую линзу направить параллельно главной оптической оси параллельный пучок света ( $d \rightarrow \infty$ ), то после второй линзы он соберётся на некотором расстоянии  $F$  за второй линзой, то есть  $f \rightarrow F$  (это фокусное расстояние системы линз):

$$\frac{1}{l - \frac{F_1}{1 - \frac{F_1}{\infty}}} + \frac{1}{F} = \frac{1}{F_2} \Rightarrow \frac{1}{l - F_1} + \frac{1}{F} = \frac{1}{F_2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{F} = \frac{1}{F_1 - l} + \frac{1}{F_2}}.$$

Из последнего выражения видно, что оптическая сила системы соосных линз зависит от фокусных расстояний линз и от расстояния между линзами. Оптическая сила может получиться, как положительной, так и отрицательной, даже в случае, когда обе линзы были собирающие (при  $F_1 < l < F_1 + F_2$ ).

Для системы линз, сложенных вплотную ( $l \ll F_1$ ), оптическая сила системы будет равна сумме оптических сил этих линз:

$$\frac{1}{F} \approx \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \quad \text{или} \quad D \approx D_1 + D_2$$

Это правило справедливо и для нескольких тонких линз, в том числе и рассеивающих, у которых оптическая сила отрицательна.

*Увеличение системы соосных линз равно произведению увеличений, созданных отдельными линзами.*

Например, если после прохождения первой линзы размер изображения увеличился в 5 раз:  $\Gamma_1 = 5$ , а во второй линзе – уменьшился в 2 раза:  $\Gamma_2 = 1/2$ , то общее увеличение будет равно:

$$\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2, \quad \Gamma = 5 \cdot 1/2 = 2,5.$$

## § 41. Фотоаппарат и кинопроектор

**Камера-обскура.** Камера-обскура (от лат. camera obscura – «тёмная комната») – простейший вид устройства, позволяющего получать оптическое изображение объектов. Представляет собой светонепроницаемый ящик с отверстием диаметром около 2 мм в одной из стенок и экраном (матовым стеклом или тонкой белой бумагой) на противоположной стенке. Если перед ней поставить светящийся предмет, то по законам геометрической оптики на задней полупрозрачной стенке появится перевернутое изображение светящегося предмета (рис. 51).

Такая камера использовалась для зарисовок с натуры. Камера-обскура неоднократно использовалась для астрономических наблюдений. Так, в XIII веке английский философ Роджер Бэкон и французский астроном Гильом де Сен-Клу использовали её для наблюдения солнечных затмений,

астрономы XIV века Леви бен Гершом и Ибн аш-Шатир использовали камеру-обскуру для измерения углового диаметра Солнца и планет.

Фотографирование изобрели в 1839 г. французский художник, химик и изобретатель Луи Жак Манде Дагер, французский изобретатель Жозеф Нисефор Ньепс и английский физик и химик Вильям Фокс Генри Тальбот. Они получали изображение при помощи камеры-обскуры и фиксировали его химическим способом (например, на медной пластине, покрытой серебром).

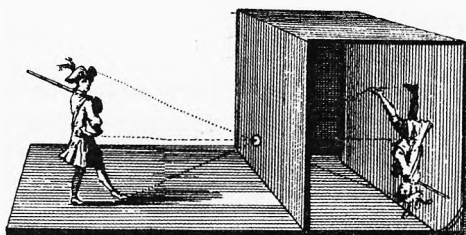


Рис. 51. Камера-обскура

**Фотоаппарат.** Современный фотоаппарат представляет собой закрытую светонепроницаемую камеру и систему линз, называемую объективом. Высокое качество изображений получается с объективами из 7–9 линз. Объектив даёт изображение на фотоплёнке или светочувствительной матрице.

Для фиксации изображения объекта на короткое время объектив открывается для прохождения через него света с помощью затвора. В объективе имеется диафрагма, то есть система лепестков, позволяющая изменять входное отверстие для света. Если световой поток большой, то диафрагму увеличивают (уменьшают входное отверстие) от избытка света, попадающего на плёнку или матрицу, и наоборот.



Луи Жак Манде  
Дагер (1787–1851)



Жозеф Нисефор  
Ньепс (1765–1833)



Вильям Фокс Генри  
Тальбот (1800–1877)

От диафрагмы ещё зависит глубина резкости изображения. Чем больше входное отверстие, тем меньше глубина чёткого изображения и наоборот. Глубина резкости также зависит от фокусного расстояния объектива. Чем больше фокусное расстояние, тем меньше глубина резкости. Фотоаппарат, как и камера-обскура, даёт перевёрнутое действительное изображение.

**Пример 13.** С помощью фотоаппарата, дающего снимки размером  $24 \times 36$  мм фотографируется главное здание МГУ. Высота здания  $h = 236$  м. На каком наименьшем расстоянии нужно стать фотографу, чтобы уместить в кадре всё здание по высоте? Фокусное расстояние объектива фотоаппарата  $F = 5$  см.



**Решение.** Фотоаппарат можно расположить вертикально или горизонтально (рис. 52), чтобы высота изображения на плёнке/матрице была либо  $H_1 = 3,6$  см, либо  $H_2 = 2,4$  см. Поскольку искомое  $d \gg F$ , то  $f \approx F$ .

Увеличение  $\Gamma = \frac{H}{h}$ , с другой стороны  $\Gamma = \frac{F}{d}$ .



Рис. 52. Главное здание МГУ



$$\text{Значит, } d = \frac{F \cdot H}{h}, d_1 = \frac{5 \text{ см} \cdot 236 \text{ м}}{3,6 \text{ см}} = 328 \text{ м}, d_2 = 492 \text{ м.} \leftarrow$$

✓ **Ответ.** Фотографу нужно отойти на 328 м или 492 м.

**Кинопроектор.** Сетчатка глаза имеет свойство сохранять зрительное ощущение около 0,1 с после её кратковременной засветки. Зрительные изображения, поступающие с промежутками менее 0,1 с, сливаются в одно непрерывно меняющееся ощущение. На этом свойстве глаза основано кино – «лучшее из искусств». Ряд фотографий (слайдов) снимают с движущегося объекта (например, с бегущего спортсмена) на одну ленту. Обычно производится 24 кадра в секунду. Затем проявленную плёнку прокручивают через кинопроектор, в задней части которого находится яркая непрерывно светящаяся лампа. С помощью двигателя прокручивают эту перфорированную ленту с частотой 24 кадра в секунду. Дополнительное устройство – обтюра́тор – периодически перекрывает свет, проходящий к кадровому окну киноаппарата, во время перемещения киноплёнки скачковым механизмом. При этом каждый кадр освещается в течение  $1/24/4 = 1/96$  с. Череда этих кадров производит впечатление непрерывного процесса. Если нужно заснять быстрый процесс (например, развитие молнии), то частота смены кадров при записи плёнки может быть увеличена до нескольких тысяч в секунду, а потом прокручиваться с частотой 24 кадра в секунду. Если же нас интересует медленный процесс, например рост бамбука, то можно снимать в замедленном темпе, а прокручивать с обычной частотой.

## § 42. Глаз как оптическая система

Глаз человека и животных – это уникальное творение природы.

**Устройство человеческого глаза.** Глаз почти сферичен (24 мм вдоль оптической оси глаза и 22 мм в поперечном направлении) (рис. 53). Наружную оболочку глаза образует склера от (греч. *scleros* – твёрдый). Она защищает содержимое глаза и обеспечивает его жёсткость. На передней поверхности склера переходит в прозрачную роговицу, через которую глаз воспринимает свет, остальная часть склеры непрозрачна. Коэффициент преломления роговицы равен 1,376. Поскольку свет проходит из воздуха сначала в роговицу, то её оптическая сила максимальна по сравнению с другими элементами глаза. Пройдя роговицу, свет попадает в переднюю камеру, заполненную водянистой влагой, коэффициент преломления которой равен 1,336. В эту жидкость погружена радужная оболочка с отверстием (зрачком). Радужная оболочка представляет собой мышечное кольцо, окрашенное пигментом. Она, сжимаясь или растягиваясь, изменяет диаметр зрачка. А значит световой поток, проникающий в глаз. Радужная оболочка выполняет роль диафрагмы.

В юном возрасте размер зрачка изменяется от 1 мм при ярком освещении до 8 мм в темноте, то есть в 8 раз. Зрачок – самая расширяющаяся часть тела челове-

ка. Интересно, что зрачок – это не вещественная часть тела. Это – «дырка от бублика». С возрастом изменение размера зрачка заметно уменьшается.

Через зрачок свет попадает на хрусталик – эластичную двояковыпуклую линзу с разными радиусами кривизны: передняя поверхность 10 мм, а задняя 6 мм в состоянии покоя. Хрусталик состоит из 22 000 тонких слоёв! Коэффициент преломления хрусталика от наружной области к внутренней увеличивается от 1,386 до 1,406. Таким образом, природа постаралась уменьшить сферическую аберрацию.

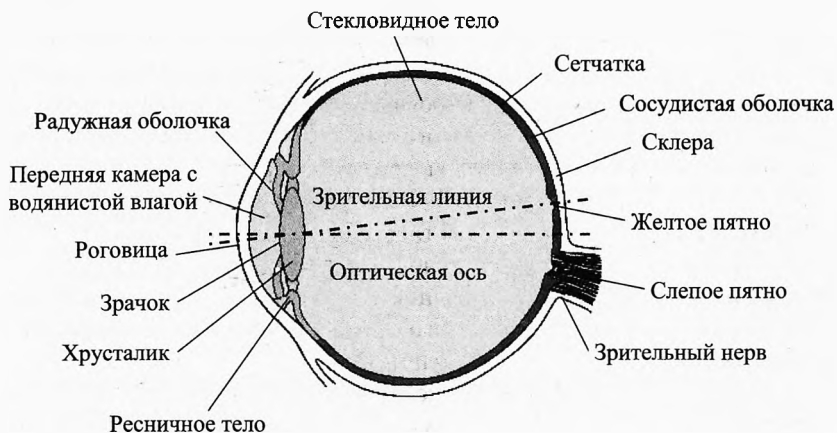


Рис. 53. Строение глаза

Цилиарная мышца, управляющая хрусталиком с помощью поддерживающей связки, может изменять кривизну поверхности хрусталика и, соответственно, оптическую силу глаза. В плоскости глаза за хрусталиком находится прозрачное стекловидное тело, показатель преломления которого 1,337.

Роговица, водянистая влага, хрусталик и стекловидное тело образует оптическую систему, аналогичную линзе с фокусным расстоянием около 17,1 мм и оптической силой около 58,5 дптр.

Оптический центр глаза расположен на расстоянии около 5 мм от радужной поверхности роговицы. Оптическая ось глаза изображена на рисунке пунктирной линией. Оптическое изображение получается на сетчатке – тонкого прозрачного слоя, основными светочувствительными элементами (рецепторами) которого являются два вида клеток: одни – в виде стебелька, называемые *палочками* (высота 30 мкм, толщина 2 мкм), другие – более короткие и более толстые, называемые *колбочками* (высота 10 мкм, толщина 6–7 мкм). Всего в глазу около 130 миллионов палочек и 7 миллионов колбочек. Толщина сетчатки, покрывающей 65% внутренней поверхности глаза, изменяется от 0,1 до 0,5 мм. Светочувствительные клетки (палочки и колбочки) находятся на задней поверхности сетчатки, которая лежит на сосудистой оболочке.

Сетчатка преобразует падающее на неё видимое излучение в электрические импульсы, передаваемые по зрительному нерву в головной мозг. В месте нахождения зрительного нерва нет палочек и колбочек, и поэтому в этом месте находит-

ся нечувствительное к свету «слепое пятно», диаметра которого 1,88 мм, что соответствует полю зрения 6%. Это значит, что человек с расстояния 1 м может не увидеть предмет диаметром 10 см, если его изображение проецируется на слепое пятно.

В центре сетчатки имеется особое место, лежащее не на оптической оси, а немного в стороне от неё, ближе к височной части головы, называемое жёлтым пятном вследствие своего цвета. Эта часть сетчатки имеет в середине небольшое центральное углубление (центральную ямку) – область наибольшей остроты зрения. Здесь сосредоточены светочувствительные колбочки, с помощью которых глаз ощущает цвета. В остальных участках сетчатки расположены в основном палочки.

Под действием света в палочках происходит перестройка вещества – зрительного пурпура (родопсина). Родопсин – соединение одной из форм витамина А (ретины) с белком сетчатки (оксином). Под действием света ретинен переходит в другую форму (из цис-формы в транс-форму). Это вызывает генерацию в клетке нервного импульса, который через зрительный нерв передаётся в мозг. Генерация импульса происходит за счёт энергии, запасённой в рецепторной клетке. Свет играет лишь роль «пускового механизма» для реакции. Этим объясняется высокая чувствительность палочек – каждая из них способна реагировать даже на 1 фотон! Палочки осуществляют видение при малой освещённости (сумеречное зрение), однако они инертны и не способны воспринимать быстрые движения.

В основе восприятия цвета лежат сложные физико-химические процессы, совершающиеся в зрительных рецепторах – колбочках. Колбочки реагируют на свет за счёт реакции йодопсина. Различают три типа «колбочек», проявляющих наибольшую чувствительность к трём основным цветам видимого спектра: красно-оранжевому (600–700 нм); зеленому (500–600 нм); синему (400–500 нм). Особенности цветовой чувствительности клеток определяются различиями в зрительном пигменте. Комбинации возбуждений этих приемников разных цветов дают ощущения всей гаммы цветовых оттенков. В компьютерной промышленности эти цвета называются тремя первичными цветами – *RGB (Red, Green, Blue)*. Все цвета, встречающиеся в природе, можно создать, смешивая свет трёх этих длин волн и варьируя их интенсивность. Смесь, состоящая из 100% каждого цвета, даёт белый свет. Отсутствие всех цветов даёт отсутствие света или чёрный цвет.

Кроме родопсина и йодопсина дно глаза обладает ещё одним пигментом (чёрного цвета), роль которого состоит в предохранении светочувствительного препарата от чересчур сильных световых раздражений. При отсутствии светового раздражения зёрна этого пигмента находятся на задней поверхности сетчатки, но при воздействии света они перемешаются навстречу падающему свету. Зёрна проникают в слои сетчатки и поглощают значительную часть световой энергии, заслоняя тем самым в большей степени палочки и колбочки от светового раздражения.

**Лирическое отступление.** После первого года работы в школе мы ходили с выпускниками встречать рассвет. На следующий день одна выпускница подарила мне рисунок. Я с недоумением спросил: «А почему на рисунке деревья чёрные, а не зеленые?» Она ответила, что на заре мы их такими видим. А я полагал, что видел их зелеными. Художник видит то, что есть, а обычный человек – то, что думает об этом предмете.

## § 43. Адаптация. Бинокулярное зрение.

### Аккомодация. Поле зрения

Глаз обладает удивительными свойствами: адаптацией, конвергенцией, аккомодацией и умением видеть перед собой сразу всё поле зрения.

**Адаптация** (от позднелат. *adaptatio* – прилаживание, приспособление) – приспособление глаза к меняющимся условиям освещения. Если мы смотрим ночью, например, в окно соседей, прильнув к стеклу, а затем переводим взгляд на темный переулок, то сначала ничего не видим, но глаза постепенно адаптируются к малой освещённости переулка, что позволяет ориентироваться в пространстве. Наоборот, если мы из темного коридора входим в ярко освещённую комнату, то сначала ощущаем себя как бы ослеплёнными, но постепенно привыкаем к большой освещённости. По диапазону адаптации глаз человека является самым совершенным «оптическим прибором», позволяющим адаптироваться к освещёностям, отличающимся в триллион раз.

Мы привели примеры темновой и световой адаптации.

**Темновая адаптация** происходит при переходе от больших яркостей к малым. Если глаз первоначально имел дело с большими яркостями, то работали колбочки, палочки же были ослеплены, родопсин выцвел, чёрный пигмент проник в сетчатку, заслоняя колбочки от света. Если внезапно яркость видимых поверхностей значительно уменьшится, то вначале раскроется шире отверстие зрачка, пропуская в глаз больший световой поток. Затем из сетчатки начнёт уходить чёрный пигмент, родопсин будет восстанавливаться, и только когда его наберётся достаточно, начнут функционировать палочки.

Так как колбочки совсем не чувствительны к очень слабым яркостям, то сначала глаз не будет ничего различать, и только постепенно приходит в действие новый механизм зрения. Лишь через 50–60 мин пребывания в темноте чувствительность глаза достигает максимального значения. При этом сам зрачок полностью расширяется за 5 минут.

**Световая адаптация** – это процесс приспособления глаза при переходе от малых яркостей к большим. При этом происходит обратная серия явлений: раздражение палочек благодаря быстрому разложению родопсина чрезвычайно сильно, они «ослеплены», и даже колбочки, не защищенные ещё зёрнами чёрного пигмента, раздражены слишком сильно. Только по истечении достаточного времени приспособление глаза к новым условиям заканчивается, прекращается неприятное чувство ослепления и глаз приобретает полное развитие всех зрительных функций. Световая адаптация продолжается 8–10 мин, а сам зрачок при этом сокращается за 5 секунд.

Итак, адаптация обеспечивается тремя явлениями: изменением диаметра отверстия зрачка; перемещением чёрного пигмента в слоях сетчатки; различной реакцией палочек и колбочек.

**Поле зрения глаза.** Общее поле зрения глаза громадно, больше, чем у какого бы то ни было другого оптического прибора ( $125^\circ$  по вертикали и  $150^\circ$  по горизонтали), но в действительности для ясного различения может быть использована лишь ничтожная часть этого поля. Поле наиболее совершенного зрения (соответствующее центральной ямке) около  $1-1,5^\circ$ , и около  $8^\circ$  по горизонтали и  $6^\circ$  по вертикали, если считать достаточно удовлетворительным зрение в области всего жёл-

того пятна. Вся остальная часть поля зрения служит только для грубого ориентирования в пространстве.

Вследствие этой особенности глазу для обозрения окружающего пространства приходится совершать непрерывное вращательное движение в своей орбите с помощью плоских глазных мышц. Глазное яблоко может вращаться в пределах  $45\text{--}50^\circ$ . Это вращение приводит изображения различных предметов на центральную ямку и даёт возможность рассмотреть их детально. Движения глаза совершаются без участия сознания и, как правило, не замечаются человеком.

**Диаметр зрачка глаза.** Обычно при конструировании приборов для визуальных наблюдений предполагается, что диаметр светового пучка, попадающего в глаз, не превышает 4–5 мм. При расчёте таких приборов почти никогда не учитываются недостатки глаза, так как они меняются от человека к человеку.

**Бинокулярное зрение обоими глазами.** При бинокулярном зрении в каждом глазу получается отдельное изображение рассматриваемого предмета, и мы должны были бы видеть его двойным. Но мы сводим наши глаза так, чтобы изображение предмета попало в каждом глазу на соответственные или тождественные места сетчатки, и тогда наш мозг приписывает оба изображения к одному предмету в пространстве.

Зрение обоими глазами представляет следующие выгоды: 1) поле зрения значительно больше, чем для каждого глаза в отдельности; 2) возможно определять размер предмета и расстояние до него по углу схождения зрительных осей обоих глаз (углу конвергенции); 3) облегчается восприятие телесности (размеров глубины) предметов, потому что изображения получаются с двух различных сторон; 4) возможно исправление ошибок одного глаза другим.

Макродвижения глаз, приводящие к изменению угла между зрительными осями левого и правого глаза, называются **вергентными движениями** (лат. *vergo* — склоняюсь). Вергентные движения выступают фактором, обеспечивающим бинокулярное зрение. Среди вергентных движений выделяют:

- **конвергенция глаз** (лат. *convergere* — приближаться, сходиться) — сведение зрительных осей обоих глаз на близко расположенные объекты;

- **дивергенция глаз** (лат. *divergentio* — расхождение) возникает при переводе взгляда с близкого на дальний объект, и состоит в разведении зрительных осей, то есть приближении их к параллельному положению. В качестве наименьшей удалённости объекта, при которой зрительные оси могут считаться параллельными, принимают расстояние в 6 м.

- **торсионные движения** (фр. *torsion* — скручивание) — вращательные движения глаз вокруг зрительных осей, за счёт которых происходит, например, компенсация зрительного образа при боковых наклонах головы.

Выделяют также **версионные движения** (лат. *verto* — двигаю, вращаю):

- **быстрые саккадические движения** (англ. *saccadic movements*), с помощью которых осуществляется быстрые скачки при зрительном поиске, чтении, рассматривании изображения, а также во время сновидений.

- **медленные следящие движения**, с помощью которых происходит отслеживание объектов, движущихся со скоростью от 5 до 40 угловых градусов в секунду. При более высоких скоростях глаза не успевают следить, и возникает ощущение «смазывания».

- **компенсаторные движения глаз** вестибулярного происхождения, обеспечивающие сохранение направления зрительных осей в пространстве при изменениях положения и скорости движения головы.

**Аккомодация** (от лат. *accommodatio* — приспособление, приурочивание) — это способность глаза настраиваться на чёткое видение предметов, находящихся на разных расстояниях.

При зрении двумя глазами появляется способность к объёмному изображению. Тут аккомодация переключается с конвергенцией, при фиксировании взгляда осей обоих глаз на одном предмете. Для предметов, находящихся на разных расстояниях, изменяется угол между осями глаз (угол конвергенции). По разнице напряжений мышц левого и правого глаза мозг судит том, какой предмет находится дальше или ближе.

Проведите небольшой эксперимент. Закройте один глаз и посмотрите на группу предметов перед собой, а затем откройте второй глаз. Вы сразу увидите, чем отличается монокулярное (плоское) зрение от бинокулярного (объёмного). При бинокулярном зрении значительно легче сохранять равновесие, чем при монокулярном.

**Механизмы аккомодации.** Немецкий физик Герман Гельмгольц более полутора веков назад предложил теорию функционирования глаза. Согласно ей, аккомодация глаза происходит путем изменения кривизны хрусталика. Кривизна хрусталика меняется путем воздействия цилиарной мышцы. Нормальный глаз имеет почти шаровую форму и в покое приспособлен для зрения вдаль без напряжения цилиарной мышцы. При этом параллельные лучи, идущие от удалённых предметов, точно фокусируются на сетчатке. При зрении на близком расстоянии цилиарная мышца, сжимая хрусталик, увеличивает оптическую силу глаза так, чтобы свет фокусировался на сетчатке. Чем ближе предмет, тем более выпуклым становится хрусталик.

Зрение характеризуется дальней и ближней точками. Точка, которую видит глаз при расслабленной цилиарной мышце, называется дальней. Для нормального (эмметропического) глаза она находится на бесконечности. Точка, которую глаз при максимально напряжении — ближняя точка. В детстве эта точка находится на расстоянии 7–8 см.

Мой старший сын в 11 классе на открытом уроке читал фрагмент из учебника физики, написанного на незнакомом ему узбекском языке, приставив книгу вплотную к носу, то есть с расстояния 4 см. Вдаль он тоже видел прекрасно.

В 30 лет у большинства нормально видящих людей ближняя точка находится на расстоянии 15 см от глаза, к 50-ти годам — примерно 50 см. У пожилых людей начинается старческая дальнозоркость (гиперметропия).

Вы легко можете определить свою ближнюю точку: рассматривайте свою ладонь, приближая её к лицу. Расстояние, на котором у Вас появится дискомфорт и боль в глазах при чётком ведении ладони, и будет Вашей ближней точкой.

Рассматривать предмет (или читать) нужно не с ближней точки, а с расстояния наилучшего зрения.

**Расстояние наилучшего зрения** — это расстояние до предмета, при котором угол зрения оказывается максимальным при номинальном напряжении глазных мышц, которое глаз способен выдержать в течение длительного времени.

Для стандартного глаза оно принимается равным 25 см.

$$d_0 = 25 \text{ см}$$

Близорукий глаз называется *миопическим*. Его оптическая сила больше, чем нужно. Параллельный пучок света в таком глазу сходится в точку, не дойдя до сетчатки.

Дальнозоркий глаз обладает недостаточной оптической силой, при этом параллельный пучок света при расслабленном состоянии глаза собирается позади сетчатки.

Исправление дальнозоркости обычно исправляется очками с собирающей линзой, а близорукость — очками с вогнутой линзой. Но можно устранить эти дефекты физическими и психофизическими упражнениями и др.

**Астигматизм.** Астигматизм (от греч. *a* — отрицательная частица и *stigma* — точка) — это дефект зрения, при котором преломляющая способность глаза различна в разных плоскостях, проходящих через его оптическую ось. Несложные формы астигматизма исправляются очками с цилиндрическими линзами. При астигматизме окружность может восприниматься как эллипс с разными полуосями, точка может восприниматься, как две три и более точек. Подобная форма астигматизма была у И. Кеплера, для которого наряду с выдающимся мозгом очень важно было иметь хорошее зрение. Но, увы, природа его обидела. Тем не менее, Кеплер открыл законы движения планет.

**Основные положения теории Бейтса о зрении.** Американский офтальмолог, пропагандист немедикаментозного метода восстановления зрения У. Г. Бейтс разработал иную, чем Гельмгольц, теорию работы глаза. В ней главная роль в процессе аккомодации отводится внешним мышцам глаза.

На рис. 54 изображены наружные мышцы глаза: сверху, снизу и по бокам глазного яблока тянутся четыре прямых мышцы глаза, которые обеспечивают его повороты в различных направлениях. На рисунке видно и две другие (косые) мышцы, которые опоясывают глазное яблоко по кругу. Бейтс утверждал, что необходимая регулировка глаза для чёткого видения на близких расстояниях осуществляется путём давления косых глазных мышц, в результате чего оно меняет свою форму, удлинняясь в переднезадней оси. Хрусталик при этом отдаляется от сетчатки глаза.

При зрении вдаль косые мышцы глаза расслабляются и принимают свою обычную почти шарообразную форму, приспособленную в состоянии покоя глаза для зрения вдаль.

Механизм изменения длины глазного яблока является дополнением способности глаза к аккомодации за счёт изменения кривизны хрусталика цилиарной мышцей. В частности этот механизм помогает видеть предметы на разных расстояниях людям с искусственным стеклянным хрусталиком. Оказывается, что вопрос о искусственном хрусталиком волновал и Бейтса, пока он сам не объяснил его.

Бейтс предположил, что главной причиной ухудшения зрения является психическое напряжение. Каждому виду аномалий рефракции соответствует свой собственный вид напряжения, которым эта аномалия вызывается. Это относится не только к аномалии рефракции, но и другим видам нарушения зрения: старческому зрению (пресбиопии), косоглазию.



Уильям Горацио Бейтс (1860–1931)

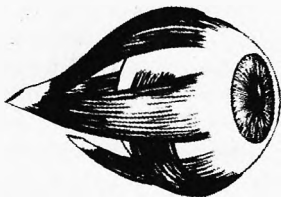


Рис. 54. Глазные мышцы

Бейтс считал, что причиной нарушения зрения является усилие увидеть, разглядеть что-либо вне зависимости от того, на каком расстоянии находится объект зрения. От последнего обстоятельства зависит лишь вид аномалий рефракции. Так *миопия* (близорукость) не связана с работой на близком расстоянии, а вызывается попытками разглядеть удаленные объекты. А *гиперметропия* (дальнозоркость) связывается с чрезмерным напряжением глаз при зрении вблизи. В то же время глаз с нормальным зрением никогда не старается увидеть. Если по какой-либо причине – тусклости освещения или удаленности объекта он не может разглядеть отдельную деталь, то глаз перемещается на другую. Он никогда не старается вывить деталь пристальным вглядыванием в неё, как это делает человек с плохим зрением.

Человек может смотреть на звёзды, имея нормальное зрение, но если он постарается сосчитать их в каком-нибудь созвездии, то он кандидат на близорукость, поскольку такая попытка обычно приводит к усилию видеть (к насилью над глазами). Нормальный глаз функционирует без каких-либо усилий подобно другим органам чувств. Вещи видятся также безуильно, как они осязаются, обоняются, слышатся или чувствуются на вкус. При зрении вдаль мышцы глаз расслаблены, и лучи от удалённых предметов фокусируются на сетчатке. При зрении вблизи косые мышцы глаз сжимаются, глазное яблоко удлинняется, и лучи света от ближних объектов чётко фиксируются на сетчатке глаза. При этом усилия косых мышц не представляют ощутимой нагрузки для них.

Таким образом, по Бейтсу причиной ухудшения зрения является психическое напряжение, которое является следствием чрезмерных усилий глаза разглядеть какой-либо предмет (например, слишком мелкий текст). Такое напряжённое состояние приводит к напряжению окологлазных мышц прямых и/или косых.

Ухудшению зрения способствуют также отрицательные эмоции (гнев, страх, горе, волнение и другие). А также неправильное питание и поза человека.

Заметим, что отрицательные эмоции действительно приводят к напряжённому состоянию психики и сказываются неблагоприятно на всех функциях организма, в том числе и зрении.

Наконец заметим, что скука способствует увеличению воздействия на человека таких ощущений, как голод, дискомфорт, боль и напряжение глаз. Бейтс прямо относил скуку к одному из видов напряжений. Для улучшения зрения нужно расслабляться. Бейтс разработал ряд упражнений, носящих как физический, так и психический характер.

Приведём пример из жизни. Наш сосед, коллега, разрабатывал систему контрольных работ по физике. Тексты писал вручную. Многие годы ходил в очках. В возрасте 60 лет получил компьютер и стал набирать тексты своих разработок, чтобы иметь их в печатном виде. Занимался этим в свободное от работы время. Через один-два года он сказал нам, что может прочитать без очков в газете мелкий шрифт и продемонстрировал чтение при освещённости ниже средней. Сейчас ему более 70 лет и он ходит без очков. Длительная дозированная нагрузка на глаза в связи с набором текста оказалась полезным упражнением, вернувшим пожилому человеку полноценное зрение.

## § 44. Приборы, увеличивающие угол зрения

Для того чтобы получить больше информации о предмете нужно увеличить угол, под которым его рассматривают – угол зрения.



Для увеличения угла зрения можно, например, подойти поближе к предмету. Но это не всегда возможно, а если хочется увидеть ещё более мелкие детали? Тут нужны инструменты, увеличивающие угол зрения.

**Глаз.** Самым простым и доступным вариантом является глаз человека без дополнительных устройств, особенно в юном возрасте. Стандартное расстояние наилучшего зрения  $d_0 = 25$  см. В юном возрасте у многих ближняя точка (минимальное расстояние, при котором чётко видно с максимальным напряжением глаз) составляет 4–8 см. Это даёт угловое увеличение от 3 до 6 крат по сравнению с наблюдением на стандартном расстоянии. Но такой вариант увеличения угла зрения вреден для глаз и приводит к близорукости (миопии). Все люди им пользуются, но применять его можно лишь изредка и кратковременно.

**Лупа.** Самым распространённым прибором для увеличения угла зрения является лупа измерительная.

*Лупа – собирающая линза в оправе, предназначенная для увеличения и наблюдения мелких предметов, расположенных на небольшом расстоянии.*

Увеличение лупы в щадящем для глаза режиме будет, когда её устанавливают близко к глазу, а наблюдаемый предмет располагают в фокальной плоскости лупы.

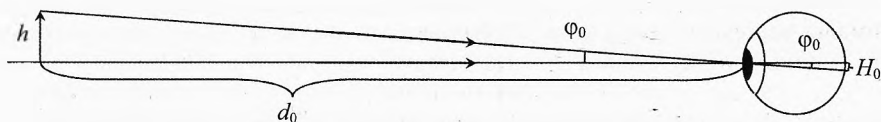


Рис. 55. Наблюдение с расстояния наилучшего зрения

На рис. 55 изображён случай, когда предмет высотой  $h$  наблюдается невооружённым глазом с расстояния наилучшего зрения  $d_0$ . В этом случае напряжение глазных мышц номинальное. Из рисунка видно, что угол  $\varphi_0$  зрения:

$$\varphi_0 = \frac{h}{d_0}, \quad \varphi_0 = \frac{H_0}{F_{\text{гл}}}; \quad \Rightarrow \quad H_0 = \frac{h \cdot F_{\text{гл}}}{d_0}, \quad (19)$$

где  $H_0$  – высота изображения предмета высотой  $h$  на сетчатке,  $F_{\text{гл}}$  – фокусное расстояние глаза.

Поместим теперь предмет на фокусном расстоянии от лупы (рис. 56). Луч 1 проходит через оптический центр  $O$  линзы без преломления в ней, а затем преломляется в глазу. Луч 2 преломляется в линзе, а затем проходит без преломления через оптический центр глаза. Поскольку предмет нахо-

дится в фокусе лупы, то оба луча между линзой и глазом идут параллельно, значит, луч 1 перед линзой параллелен лучу 2 после линзы. На сетчатку оба луча попадают в одну точку.

$$\text{Угол } \varphi = \frac{H}{F_{\text{гл}}}.$$

$$\text{С другой стороны } \varphi = \frac{h}{F_{\text{л}}}.$$

Тогда высота изображения того же предмета, полученного с помощью лупы и глаза:

$$H = \frac{h \cdot F_{\text{гл}}}{F_{\text{л}}}.$$

Подставляя  $H_0$  из (19) получим увеличение лупы:

$$\Gamma_{\text{л.щ}} = \frac{H}{H_0} \quad \text{или} \quad \boxed{\Gamma_{\text{л.щ}} = \frac{d_0}{F_{\text{л}}}} \quad (20)$$

Этот вариант использования линзы является щадящим для глаза потому, что после лупы лучи, идущие от любой точки предмета, параллельны. Поэтому глаз будет воспринимать предмет без напряжения глазных мышц. В этом случае глаз аккомодирован на бесконечность.

Чёткое изображение предмета при рассматривании лупы можно получить и с ещё большим увеличением, когда предмет придвигается ещё ближе до расстояния  $d_{\text{н}}$ , при котором глазные мышцы напрягаются номинально (с максимально допустимым напряжением для длительной работы). Это будет, если мнимое изображение предмета, даваемое лупой, окажется на расстоянии наилучшего зрения  $d_0$  (рис. 57). В этом случае глаз видит предмет, расположенный как бы на расстоянии наилучшего зрения, как в первом опыте, но только с линзой. Согласно формуле тонкой линзы:

$$\frac{1}{d_{\text{н}}} - \frac{1}{d_0} = \frac{1}{F_{\text{л}}}, \Rightarrow d_{\text{н}} = \frac{F_{\text{л}} \cdot d_0}{F_{\text{л}} + d_0}. \quad (21)$$

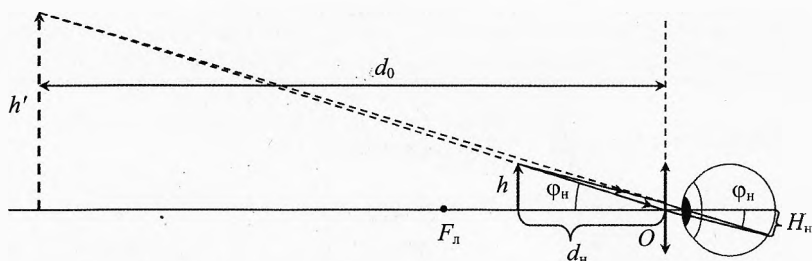


Рис. 57. Изображение в лупе на расстоянии наилучшего зрения

В этом случае, как видно из рисунка, угол зрения:

$$\varphi_n = \frac{h}{d_n}, \quad \varphi_n = \frac{H_n}{F_{гл}}; \Rightarrow H_n = \frac{h \cdot F_{гл}}{d_n}, \quad (22)$$

Подставляя  $d_n$  из (21) в (22), получим:

$$H_n = \frac{h \cdot F_{гл} \cdot (F_{л} + d_0)}{F_{л} \cdot d_0}.$$

Тогда с учётом (20) номинальное увеличение лупы равно:

$$\Gamma_{лн} = \frac{H_n}{H_0}, \text{ или } \Gamma_{лн} = \frac{d_0}{F_{л}} + 1, \text{ или } \Gamma_{лн} = \Gamma_{лш} + 1.$$

Таким образом, безопасно для здоровья можно работать с лупой, если использовать её увеличение в интервале:

$$\Gamma_{л} \in \left[ \frac{d_0}{F_{л}}; \left( \frac{d_0}{F_{л}} + 1 \right) \right].$$

На практике применяются лупы с фокусным расстоянием не менее  $F_{л} = 2$  см, так как при меньшем  $F_{л}$  изображение существенно искажается.

✎ **Пример 14.** Человек с нормальным зрением смотрит через лупу с фокусным расстоянием  $F_{л} = 5$  см. В каком диапазоне увеличений он может использовать эту лупу?

✎ **Решение.** В щадящем режиме:  $\Gamma_{ш} = \frac{d_0}{F_{л}} = \frac{25 \text{ (см)}}{5 \text{ (см)}} = 5^\times$ , то есть пятикратное увеличение. В номинальном режиме увеличение шестикратное:  $\Gamma_{н} = \frac{d_0}{F_{л}} + 1 = 6^\times$ . ✎

✓ **Ответ.** Увеличение данной лупы для нормального глаза находится в интервале от 5 до 6 крат.

✎ **Пример 15.** Решить предыдущую задачу, если этой же лупой пользуется близорукий человек, расстояние наилучшего зрения равно  $d_{0б} = 10$  см.

✎ **Решение.**  $\Gamma_{ш} = \frac{d_0}{F_{л}} = \frac{10 \text{ (см)}}{5 \text{ (см)}} = 2^\times$ ,  $\Gamma_{н} = \Gamma_{ш} + 1 = 3^\times$ . ✎

✓ **Ответ.** У близорукого человека лупа даст увеличение от 2 до 3 крат.

Не надо думать, что близорукий человек при этом проигрывает. Размер глаза у всех людей примерно одинаков. Близорукие люди со своего расстояния наилучшего зрения видят предметы уже увеличенными в 2,5 раза по

сравнению с людьми, у которых  $d_0 = 25$  см. Так что угол зрения в обоих случаях будет примерно одинаков.

**Микроскоп.** Как отмечено, выше из-за искажений изображения лупа из одной тонкой линзы даёт увеличение не многим более десяти крат ( $10\times$ ). А если хочется получить увеличение в 100 и даже в 1000 раз – как быть? Для этого используется микроскоп.

**Микроскоп** – система двух соосных короткофокусных собирающих линз, применяемая для рассматривания очень мелких предметов.

Линза, расположенная ближе к объекту наблюдения называется *объективом*, а линза, к которой прильнёт око человека, называется *окуляр*. Фокусное расстояние объектива микроскопа значительно меньше фокусного расстояния окуляра. Для уменьшения искажения изображений при больших увеличениях в качестве объектива и окуляра используют целые системы линз.

Увеличение микроскопа, как и любой системы соосных линз, равно произведению увеличений объектива и окуляра (рис. 58):

$$\Gamma_{\text{м}} = \frac{H_2}{h} = \frac{H_1}{h} \cdot \frac{H_2}{H_1} = \Gamma_{\text{об}} \cdot \Gamma_{\text{ок}}, \quad \text{или} \quad \boxed{\Gamma_{\text{м}} = \Gamma_{\text{об}} \cdot \Gamma_{\text{ок}}} \quad (23)$$

Получим формулу для увеличения микроскопа при наблюдении в щадящем режиме для глаза.

Изучаемый предмет кладут на предметном столике микроскопа. Увеличенное объективом изображение должно попасть в передний фокус окуляра:

$$d_2 = F_{\text{ок}}. \quad (24)$$

В этом случае глаз будет рассматривать в окуляре мнимое изображение предмета без напряжения глазных мышц.

Запишем формулу линзы для преломления света в объективе:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_{\text{об}}}. \quad (25)$$

Как видно из рисунка увеличение объектива:

$$\Gamma_{\text{об}} = \frac{H_1}{h} = \frac{f_1}{d_1}, \quad (26)$$

где  $d_1$  – расстояние от предмета до оптического центра объектива,  $f_1$  – расстояние от объектива до действительного изображения.

Расстояние  $L$  между объективом и окуляром равно

$$L = f_1 + d_2. \quad (27)$$

Из (24) и (27) получим:

$$f_1 = L - F_{\text{ок}}. \quad (28)$$

Из (25) получим:

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{F_{\text{об}}} - \frac{1}{f_1}.$$

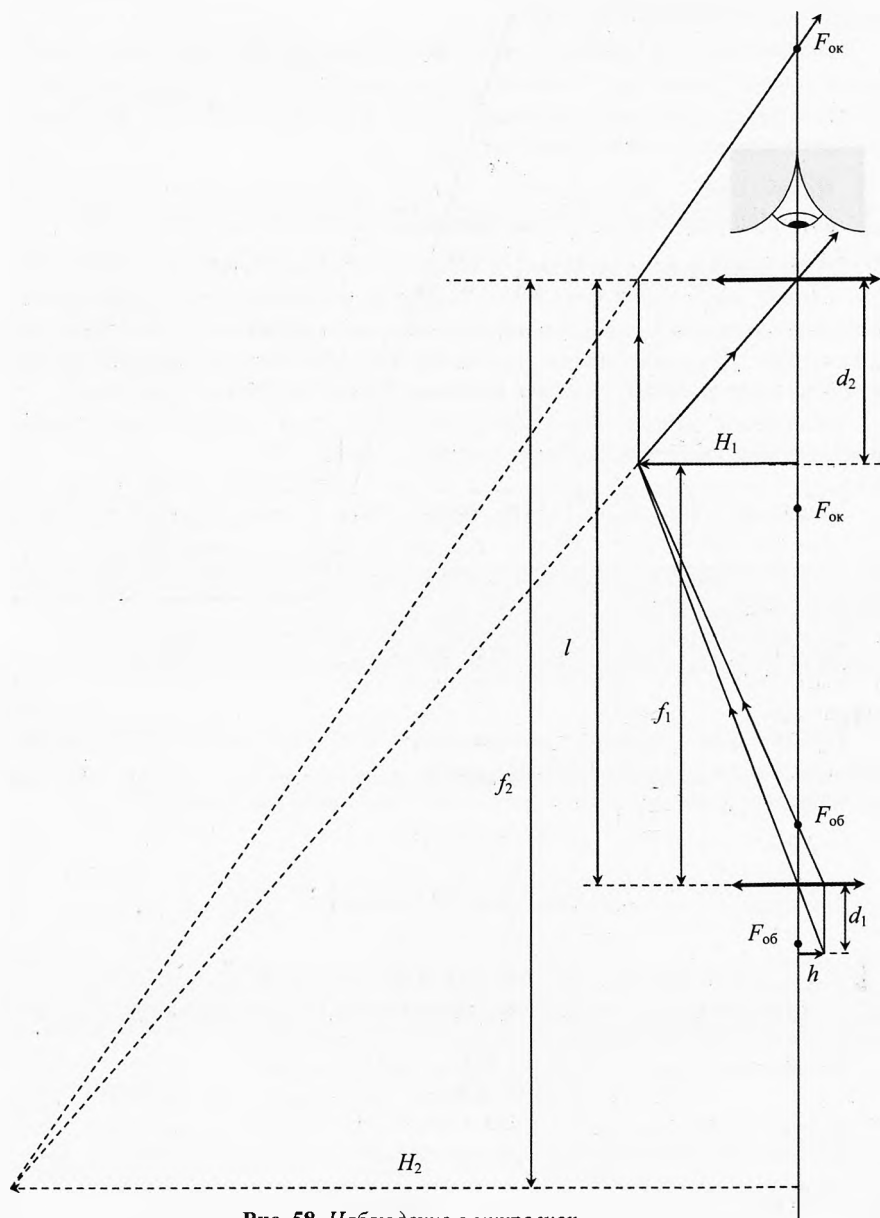


Рис. 58. Наблюдение в микроскоп

Подставим это выражение в (26):

$$\Gamma_{об} = f_1 \left( \frac{1}{F_{об}} - \frac{1}{f_1} \right) \quad \text{или} \quad \Gamma_{об} = \frac{f_1}{F_{об}} - 1. \quad (29)$$

Подставляя (28) в (29), получим:

$$\Gamma_{об} = \frac{L - F_{ок} - F_{об}}{F_{об}}. \quad (30)$$

Действительное изображение, даваемое объективом, глаз рассматривает через окуляр, как через лупу для глаза в щадящем режиме. Значит, увеличение окуляра по аналогии с лупой будет равно:

$$\Gamma_{ок} = \frac{d_0}{F_{ок}}. \quad (31)$$

Подставляя (30) и (31) в (23), получим увеличение микроскопа:

$$\Gamma_{м} = \frac{(L - F_{ок} - F_{об}) \cdot d_0}{F_{об} \cdot F_{ок}}.$$

Обозначим расстояние между задним фокусом объектива и передним фокусом окуляра через  $\delta = L - F_{ок} - F_{об}$ , тогда увеличение микроскопа:

$$\Gamma_{м} = \frac{\delta \cdot d_0}{F_{об} \cdot F_{ок}}. \quad (32)$$

Максимальное увеличение, получаемое в оптических микроскопах, составляет 1000 крат. Ограничение увеличения связано в основном с явлением дифракции.

При больших увеличениях в сотни крат разность между длиной  $L$  тубуса (трубы) микроскопа и  $\delta$  небольшая, поэтому ею порой пренебрегают и  $\delta$  называют длиной тубуса.

Формулу (32) можно переписать в следующем виде:

$$\Gamma_{м} = D_{об} \cdot D_{ок} \cdot \delta \cdot d_0.$$

*Увеличение микроскопа равно произведению оптической силы объектива, окуляра, длины тубуса и расстоянию наилучшего зрения.*

**Телескоп.** Телескоп (от греч. *tele* – далеко и *skopeo* – смотрю) – это аппарат для наблюдения удалённых предметов (планет, звёзд, гор и т.д.). У телескопа длиннофокусный объектив и короткофокусный окуляр. Если в роли объектива применяются линзы, то это телескоп рефрактор. Если же в качестве объектива использовано сферическое зеркало, то это телескоп рефлектор. Есть и другие типы оптических телескопов. Кроме оптических существуют телескопы, работающие на всех других диапазонах волн: радиотелескопы, инфракрасные, ультрафиолетовые и др.

Рассмотрим работу телескопа рефрактора (рис. 59). Направим оптическую ось телескопа на светило высотой  $h$ . От верхней и нижней точек светила лучи приходят в объектив под небольшим углом  $\varphi_0$  к оси телескопа. Поскольку расстояние от светила во много раз больше фокусного расстояния объектива  $F_{об}$ , то изображение, созданное объективом, будет находиться близко к заднему фокусу объектива (чуть дальше от него). Пусть наблюдатель, рассматривает изображение через окуляр под углом  $\varphi$  в щадящем режиме. Значит, передний фокус окуляра практически совпадает с задним фокусом объектива.

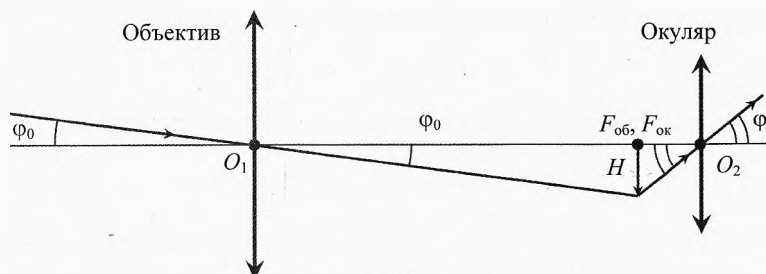


Рис. 59. Телескоп рефрактор

Угловое увеличение телескопа показывает во сколько раз угол зрения  $\varphi$ , под которым лучи от изображения светила входят в окуляр, а значит и в глаз наблюдателя, больше, чем угол  $\varphi_0$ , под которым лучи от крайних точек светила входят в телескоп. Под таким же углом  $\varphi_0$  наблюдатель видит светило без телескопа:

$$\Gamma_{\text{тел}} = \frac{\varphi}{\varphi_0}, \text{ где } \varphi_0 = \frac{H}{F_{\text{об}}}, \quad \varphi = \frac{H}{F_{\text{ок}}}; \Rightarrow \Gamma_{\text{тел}} = \frac{F_{\text{об}}}{F_{\text{ок}}}$$

При одном и том же объективе можно получить разное увеличение, используя окуляры с разными фокусными расстояниями.

**Характеристики телескопа.** У телескопа две основные задачи: а) собрать как можно больше света объективом от наблюдаемого светила, б) увеличить как можно больше угол зрения объекта, чтобы получить побольше информации о нём. Рассмотрим семь основных характеристик оптического телескопа: фокусное расстояние  $F$ , диаметр  $D$  и относительное отверстие объектива  $A$ , увеличение  $\Gamma$ , разрешающая способность  $\theta$ , проникающая способность  $m_T$ , поле зрения телескопа  $N$ .

**1. Фокусное расстояние объектива.** Одной из основных характеристик телескопа является фокусное расстояние  $F$  объектива. От него зависят линейные размеры протяжённых небесных объектов (Луна, Солнце, туманности и др.).

Из рис. 59 видно, что размер изображения светила  $H$ , даваемое объективом, определяется выражением:

$$H = F \cdot \varphi_0,$$

где  $\varphi_0$  — угол в радианной мере, под которым свет приходит в телескоп от светила размером  $h$ . При одном и том же угле  $\varphi_0$  изображение, даваемое объективом, прямо пропорционально фокусному расстоянию  $F$  объектива. Чем длиннее телескоп, тем больше размер изображения светила.

**2. Диаметр  $D$  объектива.** Световой поток, собираемый объективом, пропорционален квадрату его диаметра  $D$ :

$$\Phi = E \cdot \frac{\pi D^2}{4},$$

где  $E$  — освещённость объектива, создаваемая светилom.

То есть чем больше диаметр объектива телескопа, тем больше света от источника можно собрать. К тому же чем больше диаметр объектива, тем меньше будут искажения от дифракции на его краях.

**3. Относительное отверстие (светосила) объектива.** Оно равно отношению диаметра объектива к его фокусному расстоянию:

$$A = \frac{D}{F}.$$

Квадрат значения относительного отверстия определяет освещённость в плоскости изображения и часто называется светосилой объектива. Светосила объектива равна отношению освещённости изображения на светочувствительном слое к яркости снимаемого предмета. Геометрическая светосила  $J$  (без учёта потерь света на отражение и поглощение света) равна площади отверстия объектива, делённой на квадрат фокусного расстояния:

$$J = \frac{S}{F^2} = \frac{\pi \cdot D^2}{4 \cdot F^2} = \frac{\pi \cdot A^2}{4}.$$

Чем больше светосила объектива, тем ярче получается изображение протяжённого светила в его фокальной плоскости. Действительно, чем короче телескоп при данном диаметре объектива, тем изображение светила меньше ( $H = F \cdot \varphi_0$ ). Поэтому световой поток падает на меньшую площадь и создаёт большую освещённость (на плёнке, ПЗС-матрице или сетчатке глаза наблюдателя).

Если нужно получить изображение светила более крупным и ярким, то нужно взять объектив большего диаметра с большим фокусным расстоянием (выбрать телескоп пошире и подлиннее). Классические рефракторы, как правило, выполняются длиннофокусными, с относительным отверстием 1/10–1/12, это позволяет уменьшить вредное влияние хроматической аберрацией. Но в последнее время многие производители начали выпускать короткофокусные рефракторы с относительным отверстием 1/5–1/6. Хотя эти телескопы и страдают от более заметного хроматизма, чем их длиннофокус-



ные собратья, они являются гораздо более лёгкими и компактными при перевозках.

**4. Линейное (угловое) увеличение телескопа.** Как показано выше, увеличение, даваемое телескопом, равно отношению фокусного расстояния объектива к фокусному расстоянию окуляра:

$$\Gamma = \frac{F_{\text{об}}}{F_{\text{ок}}}.$$

В телескопе имеется один объектив и к нему прилагается, как правило, несколько окуляров. Окуляр состоит из двух короткофокусных линз. Изображение более чёткое с окуляром, дающим меньшее увеличение. Его лучше использовать при неблагоприятных погодных условиях. Наибольшее допустимое увеличение телескопа вычисляется по эмпирической формуле:

$$\Gamma_{\text{max}} = 2D.$$

То есть максимальное увеличение телескопа численно равно удвоенному диаметру объектива телескопа измеренному в миллиметрах (например, 120 крат увеличение для 60-мм телескопа). Дальнейший рост увеличения не даст выигрыша, т.к. новых деталей вы, скорее всего, не увидите, а общая яркость изображения значительно снизится. При особо благоприятных погодных условиях в некоторых видах наблюдений (например, при разрешении тесных двойных звёзд) можно с успехом использовать увеличения, превышающие «двойной предел», так что данное правило не является строгим. С другой стороны, беспокойствие атмосферы редко даёт возможность проводить комфортные наблюдения с увеличением более 300 крат.

**5. Разрешающая способность телескопа.** Разрешающая способность  $\theta$  телескопа — это минимальное угловое расстояние между двумя светящимися точками, чётко различаемыми в телескопе. Разрешающая способность телескопа ограничена волновой природой (дифракцией) света. Она приблизительно равна отношению длины волны  $\lambda$ , на которой ведётся наблюдение, к диаметру объектива:

$$\theta \approx \frac{\lambda}{D}, \quad [\theta] = \text{рад}.$$

Чем меньше длина волны, на которой наблюдается светило, и чем больше диаметр объектива, тем разрешающая способность телескопа лучше, то есть тем более мелкие детали можно с его помощью рассмотреть.

Если наблюдение ведётся в видимой части света, то за основу берётся зелёный свет, длиной волны  $\lambda = 555 \text{ нм}$ . Разрешающая способность телескопа измеряется, как правило, в угловых секундах. Тогда, написанное выше условие примет вид:

$$\theta = 206265'' \cdot \frac{\lambda}{D},$$

т.к. угол  $1 \text{ рад} \approx 206265''$ .

Существуют и другие несколько отличающиеся выражения для разрешающей способности телескопа. Например:

$$\theta = 251640'' \cdot \frac{\lambda}{D}.$$

В школьных задачах, в том числе и олимпиадных, как правило, требуется оценочный вариант решения, поэтому подойдёт любой вариант формулы. *«Хоть чего – хоть чёрта в ступе – привези!»* – В. Высоцкий.

**6. Проницающая способность (оптическая мощь).** Проницающая способность  $m_{\tau}$  телескопа равна максимальной звёздной величине (наиболее слабые звёзды), которые можно увидеть в этот телескоп.

Приведём два варианта формул, по которым можно вычислить оптическую мощь телескопа:

$$m_{\tau} = 2,1 + 5 \lg D,$$

где  $D$  – диаметр объектива телескопа, выраженный в мм.

$$m_{\tau} = 6 + 5 \lg \frac{D}{d},$$

где  $d$  – диаметр зрачка наблюдателя (примерный диаметр человеческого зрачка в темноте равен 6 мм).

**7. Поле зрения телескопа.** Поле зрения  $N$  телескопа – это угловой размер участка неба видимого в телескоп одномоментно.

Опытным путём установлено, что диаметр поля зрения телескопа, выраженной в угловых минутах дуги, зависит от увеличения телескопа:

$$N = \frac{2000}{\Gamma}, \quad [N] = \text{угловая минута}.$$

Чем больше увеличение телескопа, тем меньше его поле зрения. И наоборот, чем больше поле зрения телескопа, тем больший кусок неба виден, но тем мельче объекты.

✂ **Пример 16.** Диаметр объектива школьного рефрактора  $D = 50$  мм. Длина трубы телескопа равна  $L = 52$  см. В комплектации имеется два окуляра с фокусными расстояниями  $F_1 = 10$  мм,  $F_2 = 28$  мм. Вычислить фокусное расстояние объектива относительно отверстия, увеличения телескопа, его разрешающую и проницающую способность, а также поле зрения.

➡ **Решение.** Фокусное расстояние объектива приблизительно равно длине трубы телескопа, то есть  $F_{об} \approx 52$  см.

Относительное отверстие  $A = \frac{D}{F_{об}} = \frac{50 \text{ мм}}{520 \text{ мм}} = 0,096 \approx 0,1$ .

Увеличение телескопа:

$$\Gamma_1 = \frac{F_{\text{об}}}{F_1} = \frac{520 \text{ мм}}{10 \text{ мм}} = 52, \quad \Gamma_2 = \frac{520 \text{ мм}}{28 \text{ мм}} \approx 18,6 \approx 19.$$

Разрешающая способность школьного телескопа:

$$\theta = 206265'' \cdot \frac{\lambda}{D} = 206265'' \cdot \frac{555 \text{ нм}}{0,05 \text{ м}} \approx 2,3''.$$

Это примерно в 30 раз лучше чем у стандартного человеческого глаза.

Оптическая мощь  $m_t = 2,1 + 5 \lg D = 2,1 + 5 \lg 50 = 10,6^m$ . В данный телескоп можно уверенно увидеть звёзды до десятой звёздной величины.

Поле зрения телескопа:

$$N_1 = \frac{2000}{\Gamma_1} = \frac{2000}{52} = 38,5'; \quad N_2 = \frac{2000}{18,6} = 108' \approx 1,8^\circ.$$

В первом случае увеличение больше, чем во втором, но меньше поле зрения, например Луна или Солнце занимают в первом случае почти все поле зрения телескопа. ←



## Упражнения

**1** Мнимое изображение предмета в собирающей линзе с фокусным расстоянием  $F = 48$  см находится в фокусе линзы ( $f = 48$  см). Определить расстояние от линзы до предмета.

**2** Объективом проекционного аппарата является тонкая линза с фокусным расстоянием  $F = 15$  см. Диапозитив (прозрачная плёнка с рассматриваемым изображением) находится на расстоянии  $d = 16,2$  см от объектива. На каком расстоянии от объектива получится чёткое изображение диапозитива?

**3** Карандаш совмещён с главной оптической осью тонкой собирающей линзы. Середина карандаша находится на расстоянии  $2F$  от линзы. Определить длину изображения карандаша, если длина карандаша равна фокусному расстоянию линзы  $F = 12$  см.

**4** На оси  $X$  находятся: точечный источник света в точке  $x = 0$ , тонкая рассеивающая линза с фокусным расстоянием  $F_1 = -10$  см в точке  $x_1 = 10$  см, тонкая собирающая линза в точке  $x_2 = 25$  см. Обе линзы перпендикулярны оси  $X$ . Пройдя данную оптическую систему, свет от источника распространяется параллельным пучком. Определить фокусное расстояние собирающей линзы.

**5** С помощью тонкой линзы на экране получено изображение предмета с пятикратным увеличением. Экран передвинули на  $x = 30$  см вдоль главной оптической оси. Затем, при неизменном положении линзы, передвинули предмет так, чтобы изображение снова стало резким. В этом случае изображение получено с трёхкратным увеличением. Определить фокусное расстояние линзы.

**6** Лучшие спринтеры пробегают стометровку за  $t = 10$  с. Какая выдержка допустима при фотографировании бегуна, если на негативе размытие изображение не должно превосходить  $\Delta = 0,5$  мм? Фотографирование производится с расстояния  $r = 10$  м, оптическая сила объектива фотоаппарата  $D = 20$  дптр.

**7** Под каким максимальным углом может падать свет на плоский торец оптического волокна, чтобы он не выходил из сердцевины в оболочку? Показатель преломления сердцевины  $n_1 = 1,47$ , оболочки  $n_2 = 1,46$ .

**8** Определить оптическую силу лупы, дающей шестикратное увеличение в падающем режиме для глаза.

**9** В трубе Галилея (например, театральном бинокле) объективом служит длиннофокусная собирающая линза, окуляром – короткофокусная рассеивающая линза. Мнимый фокус окуляра совпадает с задним фокусом объектива. Начертить ход лучей в этой системе и определить угловое увеличение трубы.

**10** С помощью фотоаппарата с объективом, оптическая сила которого  $D = 12$  дптр, фотографируют предмет, находящийся на дне водоёма глубиной  $h = 2$  м. Каково расстояние между центром объектива и плёнкой? Сравните со случаем, когда предмет находится в воздухе. Считайте, что объектив располагается вблизи поверхности воды ( $n = 4/3$ ).

**11** Диаметр зеркала большого азимутального телескопа БТА, крупнейшего в Евразии, установленного на высоте 2070 м над уровнем моря недалеко от станции Зеленчукская (респ. Карачаево-Черкесия), составляет  $D = 6000$  мм. Фокусное расстояние его объектива  $F_{об} = 24000$  мм. Вычислить относительное отверстие объектива, разрешающую и проникающую способность, а также увеличение и поле зрения, если фокусное расстояние окуляра  $F_{ок} = 20$  мм.

### Решения, указания и ответы для самоконтроля

**1**  $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f} \Rightarrow d = \frac{F \cdot f}{F + f} = 24$  см.

**2**  $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{F \cdot d}{d - F} \approx 2$  м.

**3** Концы карандаша находятся от линзы на расстояниях:  $d_1 = 1,5 \cdot F$  и  $d_2 = 2,5 \cdot F$ . Из формулы линзы  $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$  найдём расстояния до изображения концов карандаша:  $f = \frac{F \cdot d}{d - F}$ ,  $f_1 = 3 \cdot F = 36$  см,  $f_2 = \frac{5}{3} F = 20$  см. Длина изображения карандаша  $L = f_1 - f_2 = \frac{4}{3} F = 16$  см.

**4**  $\frac{1}{F_1} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}$ , где  $F_1 < 0$ ,  $d_1 = x_1 - x = 10$  см;

$$\Rightarrow f_1 = \frac{F_1 \cdot d_1}{d_1 - F_1} = -5 \text{ см.}$$

Изображение  $S$  от рассеивающей линзы будет мнимое с координатой  $x_S = x_1 + f_1 = 5$  см, то есть от второй линзы на расстоянии  $d_2 = x_2 - x_S = 20$  см. Поскольку после собирающей линзы пучок станет параллельным, значит, изображение  $S$  от первой линзы находится в фокусе  $F_2$  второй линзы (рис. 60):  $F_2 = d_2 = 20$  см.

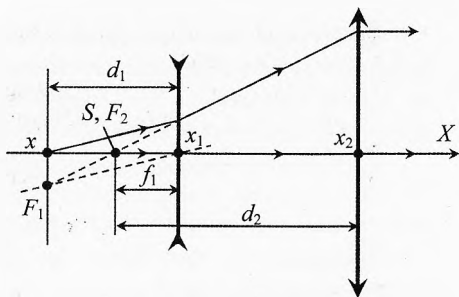


Рис. 60. Система линз

**5**  $\Gamma = \frac{f}{d}$ ;  $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$ ;  $\Rightarrow \Gamma = \frac{f - F}{F}$ . Значит, для снижения увеличения  $\Gamma$  с

5 до 3 необходимо уменьшить  $f$ . Поэтому из формулы по условию  $f_2 = f_1 \pm x$  выбираем знак «-», то есть экран придвинули к линзе:  $f_2 = f_1 - x$ . Поэтому

$$\Gamma_1 = \frac{f_1 - F}{F}, \Gamma_2 = \frac{f_1 - x - F}{F}, \Rightarrow F = \frac{x}{\Gamma_1 - \Gamma_2} = 15 \text{ (см)}.$$

**5**  $v = \frac{L}{t}$ ,  $\frac{x}{r} = \frac{\Delta}{F}$ ,  $x = v \cdot \tau$ ,  $D = \frac{1}{F}$ ;  $\Rightarrow \tau = \frac{\Delta \cdot D \cdot r \cdot t}{L} = 0,01 \text{ с.}$

**7** Свет падает из воздуха на торец сердцевины под углом  $\alpha$  и преломляется под углом  $\alpha_1$  (рис. 61):

$$\sin \alpha = n_1 \cdot \sin \alpha_1.$$

На границе сердцевина-оболочка свет должен испытать полное внутреннее отражение, значит:  $\beta \geq \beta_{\text{пр}}$ ,  $\sin \beta_{\text{пр}} = n_2/n_1$ .

Так как  $\alpha_1 + \beta = 90^\circ$ , то

$$\sin \alpha_1 = \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} \leq \sqrt{1 - (n_2/n_1)^2}.$$

Значит:  $\sin \alpha \leq \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ ,  $\alpha \leq 9,8^\circ$ .



Рис. 61. Оптическое волокно

**8**  $\Gamma = d_0/F$ , где  $d_0 = 25$  см – расстояние наилучшего зрения. Оптическая сила  $D = 1/F = \Gamma/d_0 = 24$  дптр.

**9** В трубе Галилея объективом служит длиннофокусная собирающая линза, окуляром – короткофокусная рассеивающая линза. Дальние фокусы обеих линз совмещены между собою (рис. 62).

**Угловое увеличение  $\Gamma$**  – отношение тангенса угла наклона луча, вышедшего из оптической системы, к тангенсу угла наклона соответствующего ему луча, вошедшего в систему.

Направим параллельный пучок света под углом  $\alpha$  к главной оптической оси. При отсутствии второй линзы этот пучок собрался бы в фокальной плоскости первой линзы в точке  $A$ , причём луч  $O_1C$  проходит через центр линзы  $O_1$  без преломления. Проведём побочную оптическую ось  $BO_2$ , параллельно лучу  $O_1C$ . Во второй линзе луч  $O_1C$  преломится так, что его продолжение пересечётся с лучом  $BO_2$

в фокальной плоскости этой линзы в точке  $B$ . После преломления во второй линзе пучок станет параллельным.

Из  $\triangle O_1 O_2 C$  видно, что  $O_2 C = O_1 O_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha$ .

Из  $\triangle B D O_2$  видно, что  $D O_2 = B D \cdot \operatorname{tg} \alpha$ .

Из  $\triangle B D C$  видно, что  $D C = B D \cdot \operatorname{tg} \beta$ .

Учитывая, что  $D C = D O_2 + O_2 C$ , получим:  $B D \cdot \operatorname{tg} \beta = B D \cdot \operatorname{tg} \alpha + O_1 O_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha$ .

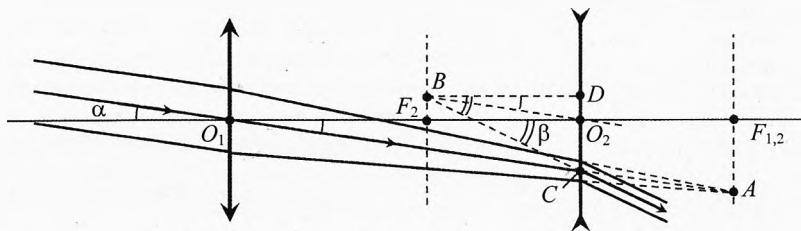


Рис. 62. Труба Галилея

Тогда угловое увеличение  $\Gamma = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{B D + O_1 O_2}{B D}$ . Учитывая, что  $B D = F_2$  и что

$F_1 = O_1 O_2 + F_2$ , окончательно получим:

$$\Gamma = \frac{F_1}{F_2}, \quad \Gamma > 1.$$

Отметим, что параллельный пучок света, падающий на эту систему, сжимается во столько же раз, во сколько раз увеличивается тангенс угла, то есть в  $\Gamma$  раз. Это легко проверить, если построить ход лучей параллельных главной оптической оси (рис. 63).

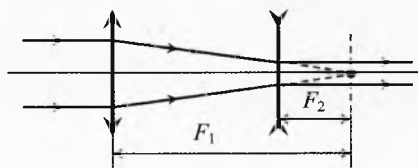


Рис. 63. Труба Галилея

**10**  $D = \frac{1}{f} + \frac{1}{d}$ . В воздухе ( $d = h$ ):

$$\Rightarrow f = \frac{h}{D \cdot h - 1} = 87 \text{ мм. В воде } (d \approx \frac{h}{n}): f = \frac{h/n}{D \cdot (h/n) - 1} = 88 \text{ мм.}$$

**11** Относительное отверстие объектива  $A = \frac{D}{F} = 0,25$ ; разрешающая способность  $\theta \approx \frac{\lambda}{D} = 0,02''$ ; проникающая способность  $m_r = 2,1 + 5 \lg D = 21^m$  (можно наблюдать звёзды до 21-й звёздной величины); увеличение  $\Gamma = \frac{F_{об}}{F_{ок}} = 1200$ ; поле зрения  $N = \frac{2000}{\Gamma} = 1,67'$ .

# Глава 5. Тепловое излучение и фотометрия

*Я заметил, что даже те люди, которые утверждают, что всё предрешиено и что с этим ничего нельзя поделать, смотрят по сторонам, прежде чем переходить дорогу.*

Стивен Уильям Хокинг  
(английский физик-теоретик и космолог)

## § 45. Равновесное тепловое излучение

**Закон Кирхгофа. Абсолютно чёрное тело.** Тепловое излучение – это явление излучения телами электромагнитных волн, обусловленное преобразованием энергии теплового движения частиц тела в электромагнитное излучение. Тепловое движение имеет место при любых, в том числе низких, температурах. Поэтому тела излучают при любых температурах. Но чем выше температура тела, тем больше поток его излучения и шире диапазон излучаемых частот.

Способность тела поглощать тепловое излучение зависит от его температуры, частоты падающего излучения, а также от формы и химического состава тела.

В 1859 г. немецкий физик Густав Роберт Кирхгоф установил один из основных законов теплового излучения.

*Отношение излучательной способности тела к поглощательной одинаково для всех тел при данной температуре для данной частоты и не зависит от их формы и химической природы (закон Кирхгофа).*

Явления излучения и поглощения удобно изучать на модели абсолютно чёрного тела (АЧТ). Понятие и модель АЧТ ввел Кирхгоф в 1862 г.

Абсолютно чёрное тело – это мысленная модель тела, которое полностью поглощает падающее на него электромагнитное излучение, независимо от температуры этого тела. Таким образом, для АЧТ поглощательная способность (отношение поглощённой энергии к энергии падающего излучения) равна единице независимо от частоты излучения, направления распространения и поляризации.

Абсолютно чёрное тело в природе не существует, однако хорошим приближением к нему является устройство из замкнутой полый оболочки (температура внутренней поверхности которой  $T$ ) с малым отверстием (рис. 1). Внутри полости устанавливается практически полное равновесие излучения с веществом (сколько энергии в единицу времени излучение, находящееся внутри полости, отдаёт внутренней стенке оболочки, столько же энергии излучает внутренняя стенка оболочки, возвращая эту энергию в полость).

Поэтому излучению приписывается температура внутренней поверхности оболочки. Плотность энергии излучения, выходящего из отверстия, очень мало отличается от равновесной внутри оболочки. Подобные устройства, с высокой точностью моделирующие АЧТ, применяют в качестве световых эталонов и используют при измерении высоких температур.

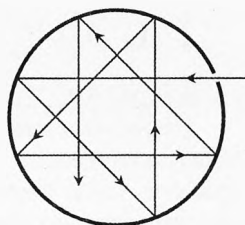


Рис. 1. Модель абсолютно чёрного тела



Густав Роберт  
Кирхгоф (1824–1887)



Йозеф Стефан  
(1835–1893)



Людвиг Больцман  
(1844–1906)



Вильгельм Вин  
(1864–1928)

Чёрный бархат, другие чёрные ткани, а также чёрная бумага близки по оптическим свойствам к абсолютно чёрному телу. Чёрные тела являются более интенсивными источниками излучения, чем светлые. Если приготовить плов в чёрной и белой сковородах (с крышками), то плов в чёрной сковороде остынет значительно быстрее, чем в белой.

**Закон Стефана–Больцмана.** В 1879 г. австрийский физик Йозеф Стефан установил экспериментально, что плотность потока излучения (энергия, излучаемая с единичной площади поверхности в единицу времени) пропорциональна четвертой степени температуры.

Закон был сформулирован для испускательной способности любого тела. Однако последующие измерения показали, что он справедлив только для АЧТ. В 1884 г. этот закон был теоретически обоснован австрийским физиком-теоретиком Людвигом Больцманом.

Интегральная (суммарная по всевозможным частотам) плотность потока излучения абсолютно чёрного тела пропорциональна четвёртой степени его абсолютной температуры:



$$j = \sigma \cdot T^4$$

где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$  – постоянная Стефана–Больцмана.

### Распределение энергии в спектре.

Макроскопическое тело состоит из огромного числа атомов, каждый из которых является источником электромагнитного излучения. Атомы колеблются с различными частотами. Поэтому излучение сильно нагретого тела содержит волны всевозможных частот.

На опыте было изучено распределение энергии, излучаемой телами при разных температурах и частотах (длинах волн). На рис. 2 изображены кривые распределения плотности потока излучения АЧТ в зависимости от длины волны (то есть спектральные плотности потока излучения  $j_\lambda = \frac{\Delta j}{\Delta \lambda}$ ) при разных температурах.

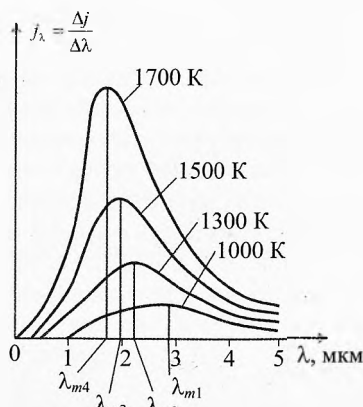


Рис. 2. Распределение плотности потока излучения АЧТ

Площадь под каждой кривой в определённом масштабе равна интегральной (полной) плотности потока на всём диапазоне длин волн.

Эта площадь быстро растёт с увеличением температуры излучателя (пропорционально  $T^4$ ).

**Закон смещения Вина.** Обратим внимание на то, что максимум спектральной плотности потока излучения  $j_{\lambda_{max}}$  при увеличении температуры смещается в сторону всё более коротких длин волн. В 1893 г. немецкий физик Вильгельм Вин исследовал зависимость излучательной и поглощательной способности АЧТ, опираясь на электродинамику, термодинамику и оптику. Он пришёл к следующему выводу.

Длина волны  $\lambda_m$ , на которую приходится максимум плотности потока излучения абсолютно чёрного тела, обратно пропорциональна его абсолютной температуре  $T$  (закон смещения Вина):

$$T \lambda_m = b$$

или

$$\lambda_m = \frac{b}{T}$$

где постоянная  $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ .

✎ **Пример 1.** При какой температуре максимум плотности потока излучения АЧТ будет приходиться на: 1) фиолетовое излучение  $\lambda_1 = 0,40$  мкм; 2) красное излучение  $\lambda_2 = 0,78$  мкм?

→ **Решение.** Согласно закону смещения Вина:

$$\lambda_m = \frac{b}{T} \Rightarrow T = \frac{b}{\lambda_m}.$$

$$1) T_1 = \frac{2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}}{0,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}} = 7245 \text{ К} \approx 7,2 \cdot 10^3 \text{ К}.$$

$$2) T_2 = \frac{2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}}{0,78 \cdot 10^{-6} \text{ м}} = 3715 \text{ К} \approx 3,7 \cdot 10^3 \text{ К}. \leftarrow$$

✓ **Ответ.** Температура поверхности фиолетовой абсолютно чёрной звезды равна семь тысяч двести кельвин, а красной – три тысячи семьсот кельвин.

## § 46. Квантовая гипотеза Планка

Законы излучения абсолютно чёрного тела (закон Стефана–Больцмана и закон смещения Вина) не позволили аналитически описать кривые распределения энергии в спектре АЧТ (рис. 2). Более того, применение законов классической физики к исследованию спектрального состава излучения АЧТ привело к результатам, противоречащим закону сохранения энергии. Решение этой проблемы нашел в 1900 г. Макс Планк.

В классической физике испускание электромагнитного излучения источником рассматривается как непрерывный процесс. Считается, что излучающее тело непрерывно посылает в пространство электромагнитные волны. Аналогично рассматривается и процесс поглощения волн. Планк пришел к выводу, что именно представление о непрерывности излучения неверно. Планк высказал следующую гипотезу.



Макс Планк  
(1858–1947)

Абсолютно чёрное тело испускает свет не непрерывно, а определёнными порциями энергии – **квантами** (от лат. quantum – сколько, то есть количество). Энергия кванта по теории Планка прямо пропорциональна частоте излучения:

$$E_\gamma = h\nu,$$

где  $\nu$  – частота излучения,  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка.

Гипотезы о прерывистом процессе испускания электромагнитного излучения оказалось достаточно для правильного описания излучения АЧТ и математического вывода зависимости спектральной плотности потока излучения от частоты и температуры:  $j_\nu = f(\nu, T)$ . Планк получил формулу для спектральной светимости АЧТ:

$$j_\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1}, \quad (1)$$

где  $j_\nu = \frac{\Delta j}{\Delta \nu}$  – спектральная плотность мощности излучения абсолютно чёрного тела,  $c$  – скорость света в вакууме,  $h$  – постоянная Планка,  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура тела,  $\nu$  – частота излучения.

Формула Планка (1) хорошо согласуется с экспериментальными данными. Идея Планка о прерывистом характере процесса излучения света оказала огромное влияние на всё дальнейшее развитие физики.

✎ **Пример 2.** Максимум энергии излучения в спектре Солнца приходится примерно на длину волны  $\lambda_m = 470$  нм. Средняя плотность потока излучения с поверхности Солнца  $j = 6,33$  кВт/см<sup>2</sup>. Вычислить температуру Солнца.

➡ **Решение.** По закону смещения Вина  $\lambda_m = \frac{b}{T} \Rightarrow T = \frac{b}{\lambda_m}$ .

$$T = \frac{2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}}{470 \cdot 10^{-9} \text{ м}} = 6166 \text{ К} \approx 6,2 \cdot 10^3 \text{ К}.$$

По закону Стефана–Больцмана  $j = \sigma T^4 \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{j}{\sigma}}$ .

$$T = \sqrt[4]{\frac{6,33 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2}{5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}}} = 5780 \text{ К} \approx 5,8 \cdot 10^3 \text{ К}.$$

Получилось, что температура поверхности Солнца, вычисляемая по разным законам, отличается примерно на 7%. Почему?

Дело в том, что излучение Солнца отличается от излучения абсолютно чёрного тела, для которого получены эти законы. Законы науки, полученные часто для мысленных моделей, например для идеального газа или абсолютного чёрного тела, являются некоторым приближением к реальным законам природы. Уравнение Планка и вытекающие из него законы смещения Вина и Стефана–Больцмана являются приближёнными, так как описывают не реальные тела (например, звёзды), а мысленную модель АЧТ. И мы должны радоваться, когда они дают близкие к истине результаты.

И всё же, какую температуру записать в ответ? Поскольку главное в жизни – это энергия, а закон Стефана–Больцмана оперирует со связью средней плотности потока энергии и температурой тела, то определяемая им

температура называется эффективной. Вот её и возьмем за основу, тогда  $T_{\text{эф}} = 5,8 \cdot 10^3$  К. Кроме неё и Виновской температуры, не имеющей названия, у Солнца различают ещё яркостные температуры на различных длинах волн, а также цветовые, отличающиеся ещё более существенно. На этих температурах мы не будем задерживаться. Однако в нашем случае, если округлить оба результата до одной значащей цифры, получим одинаковый ответ. ←

✓ **Ответ.** Температура поверхности Солнца равна шесть тысяч кельвин ( $T \approx 6 \cdot 10^3$  К).

## § 47. Фотометрия

Электромагнитное излучение распространяется от источников и взаимодействует с веществом: отражается, преломляется, рассеивается, поглощается. Свет представляет собой узкий участок электромагнитного излучения, видимого глазом человека в диапазоне длин волн от 0,4 до 0,76 мкм. Поэтому световой участок спектра электромагнитных излучений представляет особый интерес.

***Фотометрия** – это раздел физики, в котором изучается энергия света.*

**Энергия излучения. Световая энергия.** Энергию, излучаемую любыми телами обозначим  $Q_e$  или  $W$ . Измеряется она, как и любая другая энергия, в джоулях.

$$[Q_e] = \text{Дж}.$$

Световую энергию, воспринимаемую визуально, обозначим  $Q_v$ . Для единицы её измерения пока нет названия. Измеряется световая энергия в люмен·секунда:

$$[Q_v] = \text{лм} \cdot \text{с}.$$

**Поток излучения. Световой поток.**

*Поток излучения по всевозможным частотам или мощность излучения, проходящего через плоскую поверхность, равен энергии излучения в единицу времени.*

Обозначим его  $\Phi_e$  или  $P$ . Он измеряется в ваттах:

$$\Phi_e = \frac{Q_e}{\tau}, \quad [\Phi_e] = \text{Вт} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}}.$$

Буквой  $P$  его можно обозначать, поскольку поток излучения есть мощность, излучаемая телом по всему спектру частот.

**Световой поток** характеризует воспринимаемое глазом излучение, проходящее через некоторую поверхность в единицу времени.

Он измеряется в люменах:

$$\Phi_v = \frac{Q_v}{\tau}, \quad [\Phi_v] = \text{лм}.$$

**Сила света.** Источник может излучать энергию, в том числе свет, в различных направлениях. Для того чтобы характеризовать интенсивность излучения света в заданном направлении вводится понятие сила света.

**Сила света** – это скалярная величина, характеризующая интенсивность излучения источника в заданном направлении. Сила света равна отношению малого светового потока, к малому телесному углу в котором он распространяется:

$$I = \frac{\delta \Phi_v}{\delta \Omega}.$$

**Телесный угол.** Напомним, что телесный угол  $\Omega$  равен отношению площади  $S_\perp$  той части сферы с центром в вершине угла, которая вырезается этим телесным углом, к квадрату радиуса сферы  $R$  (рис. 3).

Телесный угол измеряется в стерadianах:

$$\Omega = \frac{S_\perp}{r^2}, \quad [\Omega] = \text{ср}.$$

Телесный угол равен 1 ср, если площадь части вырезанной сферы равна квадрату радиуса  $S_\perp = R^2$ .

Полная сфера образует телесный угол  $\Omega_n$ :

$$\Omega_n = \frac{S_{\text{сф}}}{R^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi \text{ (ср)}.$$

Кроме стерadianов, телесный угол может измеряться в квадратных радианах, квадратных градусах, квадратных минутах и квадратных секундах:

$$1 \text{ ср} = (1 \text{ рад})^2;$$

$$1 \text{ ср} = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)^2 \approx 3282,8 \text{ (град)}^2;$$

$$1 \text{ ср} \approx 3282,8 \cdot (60')^2 \approx 1,1818 \cdot 10^7 \text{ (угл. минут)}^2 \approx 4,2545 \cdot 10^{10} \text{ (угл. секунд)}^2.$$

Единицей измерения силы света в СИ является кандела (от лат. *candela* – свеча):

$$[I] = \text{кд} = \frac{\text{лм}}{\text{ср}}.$$

Кандела – это сила света, испускаемого с площади  $1/60 \text{ см}^2$  сечения излучателя перпендикулярно его сечению при температуре излучателя, равной

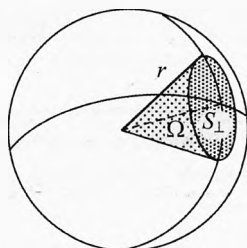


Рис. 3. Телесный угол

температуре затвердевания платины (2045 К) при давлении 101325 Па. Кандела является основной единицей измерения светотехнических величин.

Если источник света точечный, то его сила света одинакова по всем направлениям. Например, свет от далекой звезды. Источник света можно считать точечным, если действие его оценивается на расстоянии во много раз превышающем его размеры. В этом случае легко установить связь между полным световым потоком и силой света:

$$I_{(c)} = \frac{\Phi_{\text{вп}}}{\Omega_{\text{п}}}.$$

Поскольку полный телесный угол  $\Omega_{\text{п}} = 4\pi$  (ср), то сила света точечного источника:

$$I_{(c)} = \frac{\Phi_{\text{вп}}}{4\pi}.$$

✎ **Пример 3.** Вычислить силу света Солнца, если полный световой поток Солнца равен  $\Phi_{\text{с}} = 3,75 \cdot 10^{28}$  лм.

✓ **Ответ.**  $I_{\text{с}} = \frac{\Phi_{\text{с}}}{4\pi} = \frac{3,75 \cdot 10^{28} \text{ лм}}{4\pi} = 2,98 \cdot 10^{27} \text{ кд} \approx 3 \cdot 10^{27} \text{ кд}.$

✎ **Пример 4.** Какой световой поток излучается с поверхности Солнца в телесный угол, равный одной квадратной угловой секунде?

↪ **Решение.**  $\Phi_{\text{в1}} = I_{\text{с}} \cdot \Omega_1. \quad \Omega_1 = (1'')^2 = \frac{1 \text{ ср}}{4,2545 \cdot 10^{10}}.$

$$\Phi_{\text{в1}} = \frac{2,98 \cdot 10^{27} \text{ кд} \cdot 1 \text{ ср}}{4,2545 \cdot 10^{10}} = 7,0 \cdot 10^{16} \text{ лм.} \leftarrow$$

✓ **Ответ.** С поверхности Солнца в каждую квадратную угловую секунду распространяется световой поток  $7,0 \cdot 10^{16}$  лм.

Кроме силы света (оптической) вводится энергетическая сила излучения. По-другому её можно назвать интегральной силой излучения источника.

***Энергетическая (интегральная) сила излучения источника характеризует интенсивность излучения источника в заданном направлении по всему спектру длин волн излучения. Интегральная сила излучения источника в данном направлении равна энергии излучения источника, распространяющегося в единичном телесном угле за одну секунду:***

$$I_e = \frac{\delta W}{\delta t \cdot \delta \Omega} \quad \text{или} \quad I_e = \frac{\delta \Phi_e}{\delta \Omega},$$

где  $\delta \Phi_e$  – мощность излучения распространяющегося телесным углом  $\delta \Omega$ .

В СИ размерность интегральной силы излучения:

$$[I_e] = \frac{\text{Вт}}{\text{ср}} = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{ср}}.$$

✂ **Пример 5.** Чему равна интегральная сила излучения Солнца? Какова мощность излучения, распространяющегося в телесном угле, равном одной квадратной угловой минуте и квадратной угловой секунде? Мощность излучения Солнца  $\Phi_{eC} = 3,846 \cdot 10^{26}$  Вт?

→ **Решение.** 
$$I_{eC} = \frac{\Phi_{eC}}{4\pi} = \frac{3,846 \cdot 10^{26} \text{ Вт}}{4\pi \text{ ср}} = 3,06 \cdot 10^{25} \text{ Вт/ср} =$$

$$= \frac{3,06 \cdot 10^{25} \text{ Вт}}{4,2545 \cdot 10^{10} (")^2} = 7,2 \cdot 10^{14} \text{ Вт/} (")^2.$$

Мощность, излучаемая в каждую квадратную угловую минуту  $(')^2$ :

$$P_{(1')^2} = I_{eC} \cdot (1')^2 = 3,06 \cdot 10^{25} (\text{Вт/ср}) \cdot \frac{1 \text{ ср}}{1,818 \cdot 10^7} \approx 2,59 \cdot 10^{18} \text{ Вт.} \leftarrow$$

✓ **Ответ.** Энергетическая сила излучения Солнца равна  $3,06 \cdot 10^{25}$  Вт/ср. При этом в каждую квадратную угловую минуту излучается мощность  $2,59 \cdot 10^{18}$  Вт, а в каждую квадратную угловую секунду –  $7,2 \cdot 10^{14}$  Вт.

### Светоотдача источника.

*Светоотдача источника характеризует оптическую эффективность источника электромагнитного излучения. Светоотдача равна отношению светового потока источника к полной мощности его электромагнитного излучения:*

$$\eta_v = \frac{\Phi_v}{\Phi_e}, \quad [\eta_v] = \frac{\text{лм}}{\text{Вт}}.$$

Чем выше светоотдача, тем больше доля энергии, приходящейся на световую часть спектра. Например, светоотдача лампы накаливания 100 Вт равна 13,8 лм/Вт; галогеновой лампы той же мощности 16,7 лм/Вт; люминесцентной лампы от 40 до 104 лм/Вт; светодиодов 10–300 лм/Вт. Светоотдача перспективных образцов белых светодиодов с рекордными параметрами – около 250 лм/Вт. Теоретический максимум для источника монохроматического зелёного света с длиной волны 555 нм составляет 683 лм/Вт.

✍ **Пример 6.** Вычислить светотдачу главного источника света и тепла землян – Солнца.

→ **Решение.**  $\eta_{\text{вс}} = \frac{\Phi_{\text{вс}}}{\Phi_{\text{ес}}} = \frac{3,75 \cdot 10^{28} \text{ лм}}{3,846 \cdot 10^{26} \text{ Вт}} = 97,5 \text{ лм/Вт.} \leftarrow$

✓ **Ответ.** На каждый ватт мощности, излученной Солнцем, приходится 97,5 лм светового потока.

**Спектральная световая эффективность (видность).** Чувствительность глаза к излучениям различных длин волн характеризуется кривой спектральной световой эффективности (устар. назв. – видность).

*Спектральная световая эффективность излучения равна отношению светового потока монохроматического излучения длиной волны  $\lambda$  к соответствующему потоку (мощности) излучения:*

$$K(\lambda) = \frac{\Phi_v}{\Phi_e}, \quad [K] = \frac{\text{лм}}{\text{Вт}}.$$

Глаз человека наиболее чувствителен к излучению на длине волны зелёного цвет  $\lambda_3 = 555 \text{ нм}$ . Максимальное значение  $K_3 = 683 \text{ лм/Вт}$  принимает при  $\lambda_3 = 555 \text{ нм}$ .

*Относительная спектральная световая эффективность показывает, какую часть составляет световая эффективность на данной длине волны  $\lambda$  от максимальной на длине волны  $\lambda_3$ :*

$$V = \frac{K_\lambda}{K_3} \quad (2)$$

Относительная спектральная световая эффективность также равна отношению мощности излучения на длине волны  $\lambda_3 = 555 \text{ нм}$  к мощности излучения на данной длине волны  $\lambda$ , которая даёт такую же зрительную яркость:

$$V = \frac{\Phi_{\text{вс}}}{\Phi_{\text{вс}, \lambda_3}} \quad \text{при} \quad \Phi_{\text{вс}} = \Phi_{\text{вс}, \lambda_3}.$$

Относительная спектральная световая эффективность на длине волны  $\lambda_3 = 555 \text{ нм}$  максимальна и равна единице.

Используя график видности для дневного зрения (рис. 4, сплошная линия) и максимальное значение  $K_3 = 683 \text{ лм/Вт}$ , можно найти световую эффективность на любой длине волны, например на длине волны  $\lambda = 520 \text{ нм}$  видность равна  $V = 0,71$ . Из (2) получим:



$$K_{\lambda} = K_3 \cdot V = 485 \text{ лм/Вт.}$$

Значит, световая эффективность на длине волны  $\lambda = 520 \text{ нм}$  равна  $485 \text{ лм/Вт}$ , то есть каждый ватт мощности, излучаемой источником на длине волны  $\lambda = 520 \text{ нм}$ , даёт световой поток  $485 \text{ лм}$ .

Кроме графика дневной видности для стандартного глаза, когда работает в основном колбочковое зрение, на рис. 4 пунктиром представлена видность при ночной адаптации глаза, когда работает в основном палочковое зрение. Колбочки приблизительно в 100 раз менее чувствительны к свету, чем палочки, но гораздо лучше воспринимают быстрые движения.

Область, доступная зрительному восприятию, не обрывается резко на длинах волн 400 и 760 нм. На длине волны 400 нм видность в 2500 раз, а при 760 нм в 17 000 раз меньше, чем в максимуме на  $\lambda_3 = 555 \text{ нм}$ .

При длительном нахождении в темноте глаз может слабо видеть инфракрасное излучение до 950 нм и ультрафиолетовое до 300 нм.

**Освещённость.** Поток света, падая на поверхность, освещает её. Для того, чтобы характеризовать распределение светового потока по поверхности, на которую он падает, вводится скалярная физическая величина освещённость поверхности.

Если поток света однородный и падает на плоскую поверхность, то освещённость её в любой точке одинакова и больше в том случае, когда световой поток побольше.

**Освещённость** характеризует распределение светового потока по поверхности, на которую он падает. Освещённость равна отношению малого светового потока  $\delta\Phi_v$  к малой площади  $\delta S$  плоской поверхности, на которую он падает:

$$E = \frac{\delta\Phi_v}{\delta S}, \quad [E] = 1 \text{ лк} = \frac{1 \text{ лм}}{1 \text{ м}^2}.$$

Единица измерения освещённости в СИ – люкс (лк). Освещённость поверхности составляет 1 люкс, когда на один квадратный метр падает световой поток один люмен.

Чтобы почувствовать единицу освещённости люкс, приведём некоторые примеры. Освещённость от Солнца вне земной атмосферы составляет  $1,3 \cdot 10^5 \text{ лк}$ . Освещённость в швейном цехе по нормативу 700 лк (на Чебоксарской швейной фабрике «Рассвет» реально 800 лк). При освещённости в

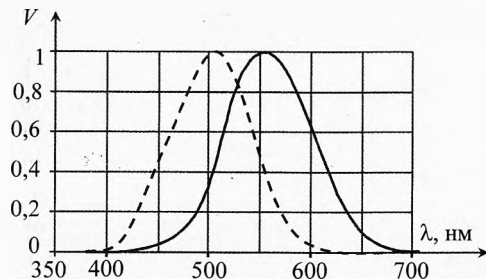


Рис. 4. Относительная спектральная световая эффективность днём и ночью

1 лк можно с трудом читать. Скорость чтения быстро нарастает при увеличении освещённости до 50 лк. При увеличении освещённости до 100–150 лк она растёт значительно медленнее и практически не изменяется при дальнейшем увеличении освещённости. На столах учащихся освещённость должна быть не менее 75 лк. Максимальная освещённость на земной поверхности от полной Луны, находящейся в зените, при средней прозрачности атмосферы составляет около 0,25 лк. Безоблачное звёздное небо создаёт ночью освещённость в тысячные доли люкс. Освещённость в десятитысячные доли люкс позволяет с трудом ориентироваться ночью. Абсолютную темноту мы «наблюдали» на Всероссийской олимпиаде по физике в Кунгурской пещере при выключенном фонарике экскурсовода.

**Освещённость энергетическая.** Наряду с освещённостью оптической введено понятие освещённость энергетическая.

*Освещённость энергетическая  $E_e$  характеризует распределение по поверхности потока лучистой энергии всего спектра излучения. Энергетическая освещённость равна потоку электромагнитного излучения, падающего на единицу площади освещаемой поверхности:*

$$E_e = \frac{\delta\Phi_e}{\delta S}, \quad [E_e] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Вместо термина энергетическая освещённость для краткости предлагается использовать *облучённость*.

Поскольку лучистый поток  $\Phi_e$  есть мощность электромагнитного излучения  $P$  ( $\Phi_e \equiv P$ ), то:

$$E_e = \frac{\delta P}{\delta S}.$$

При нормальном падении энергетическая освещённость (облучённость) равна плотности потока энергии излучения, падающего на поверхность.

$$E_{e\perp} = j.$$

✎ **Пример 7.** Вычислить Солнечную постоянную, если мощность излучения Солнца  $P_C = 3,846 \cdot 10^{26}$  Вт.

→ **Решение.** Солнечной постоянной называется плотность потока излучения, приходящего от Солнца к Земле, когда она находится от него на расстоянии одной астрономической единицы  $r = 1$  а.е.  $\approx 149,6 \cdot 10^6$  км. Нам нужно вычислить энергетическую освещённость (облучённость) Земли на расстоянии 1 а.е. от Солнца:

$$E_e = \frac{P_c}{S} = \frac{P_c}{4\pi r^2} = \frac{3,846 \cdot 10^{26} \text{ Вт}}{4\pi \cdot (1,496 \cdot 10^{11} \text{ м})^2} \approx 1367 \text{ Вт/м}^2.$$

✓ **Ответ.** Солнечная постоянная равна  $E_e = 1367 \text{ Вт/м}^2$ .

**Примечание.** Наблюдения в течение последней четверти XX века показали, что в зависимости от активности Солнца солнечная постоянная изменялась в интервале от 1363 до 1368 Вт/м<sup>2</sup>. Среднее значение за этот период составляло 1366 Вт/м<sup>2</sup>.

Поскольку Земля движется вокруг Солнца не по круговой, а по эллиптической орбите, энергетическая освещённость (облучённость) Земли всё время изменяется. Максимальна она в начале января, а минимальна – в начале июля. Максимальная облучённость Земли отличается от минимальной на 7%.

## § 48. Законы освещённости

Почему на Северном Кавказе теплее и светлее, чем в Москве, Чебоксарах и Казани? Ведь все мы ходим под одним Солнцем. Дело в том, что оптическая и энергетическая освещённость зависят не только от плотности потока прилетающего излучения, но и от угла падения лучей?

Действительно, максимальная освещённость  $E_0$  наблюдается при нормальном падении лучей на поверхность:

$$E_0 = \frac{\Phi}{S_{\perp}}.$$

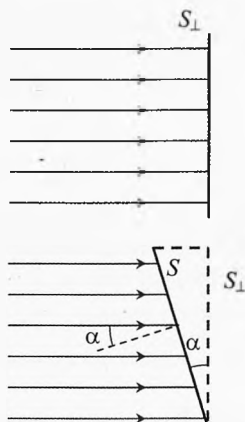
Если же на плоскую поверхность лучи падают под углом  $\alpha$  (угол между лучами и нормалью к освещаемой поверхности), то тот же световой поток уместится на поверхности большей площади  $S$ . Как видно из рис. 5:

$$S = \frac{S_{\perp}}{\cos \alpha}.$$

Освещённость этой поверхности:

$$E = \frac{\Phi}{S} = \frac{\Phi \cdot \cos \alpha}{S_{\perp}} = E_0 \cdot \cos \alpha \quad \text{или} \quad \boxed{E = E_0 \cdot \cos \alpha}.$$

Это формула выражает зависимость освещённости от угла падения.



**Рис. 5.** Падение света под углом к нормали

*Освещённость плоской поверхности пропорциональна косинусу угла падения лучей на поверхность.*

При достаточно малой площади эта формула справедлива не только для параллельного пучка лучей, но и для сходящегося и расходящегося потоков света.

**Пример 8.** Вычислить во сколько раз в день весеннего равноденствия в Кизляре (широта  $\varphi_1 = 44^\circ$ ) освещённость и облучённость в полдень больше, чем в Москве, Нижнем Новгороде, Чебоксарах, Казани (широта  $\varphi_2 = 56^\circ$ ).

**Решение.** В день весеннего равноденствия солнечные лучи падают параллельно плоскости экватора. Значит в полдень (момент верхней кульминации Солнца) угол падения лучей равен широте местности (рис. 6):

$$\alpha_1 = \varphi_1 = 44^\circ, \quad \alpha_2 = \varphi_2 = 56^\circ.$$

Освещённость в Кизляре:  $E_1 = E_0 \cdot \cos 44^\circ$ .

Освещённость в Москве:  $E_2 = E_0 \cdot \cos 56^\circ$ .

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_0 \cdot \cos 44^\circ}{E_0 \cdot \cos 56^\circ} \approx 1,29.$$

**Ответ.** На Северном Кавказе в Кизляре в день весеннего равноденствия освещённость и облучённость горизонтальной поверхности на 29% больше, чем на Московской широте.

**Освещённость, создаваемая точечным источником.** Точечным источником

электромагнитного излучения называется тело, излучающее одинаковую плотность потока по всем направлениям, причём его размеры во много раз меньше расстояний, на которых измеряется освещённость или облучённость.

Для землян все звёзды кроме Солнца, несмотря на их большие размеры, являются реальными моделями точечных источников излучения, ибо расстояния до них многократно больше их размеров. К тому же все звёзды имеют сферическую форму и излучают по всем направлениям почти одинаково. Правда на них происходит немало «бурь», также имеются пятна (участки с плотностью потока излучения меньшей, чем в среднем), но это не столь существенно.

По определению освещённость равна отношению светового потока к площади поверхности:

$$E = \frac{\Phi}{S}.$$

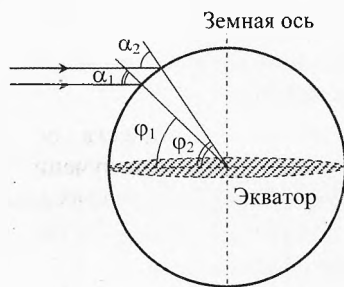


Рис. 6. Освещённость на разных широтах

Если сила света точечного источника  $I$ , то полный поток  $\Phi$ , исходящий по всем направлениям ( $\Omega_n = 4\pi$ ):

$$I = \frac{\Phi}{\Omega_n} \Rightarrow \Phi = 4\pi \cdot I.$$

Освещённость поверхности максимальна, если лучи перпендикулярны этой поверхности. Площадь сферической поверхности, окружающей источник, равна:

$$S_{\perp} = 4\pi \cdot r^2,$$

где  $r$  – расстояние от источника до поверхности, на которой оценивается освещённость.

$$E_0 = \frac{\Phi}{S_{\perp}} = \frac{4\pi \cdot I}{4\pi \cdot r^2} \quad \text{или} \quad \boxed{E_0 = \frac{I}{r^2}}.$$

Максимальная освещённость  $E_0$  от точечного источника равна отношению силы света  $I$  к квадрату расстояния  $r$  от источника до нормальной поверхности.

Если же лучи света падают на поверхность под углом  $\alpha$ , то её освещённость меньше:

$$E = E_0 \cdot \cos \alpha, \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{I}{r^2} \cdot \cos \alpha}.$$

Эта формула выражает **закон освещённости для точечного источника** в общем виде. Закон справедлив как для оптической, так и для энергетической освещённости.

*Освещённость, создаваемая точечным источником, прямо пропорциональна силе света и косинусу угла падения лучей и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника до освещаемой поверхности.*

**Пример 9.** Вычислить освещённость, создаваемую Солнцем на среднем расстоянии от Земли до Солнца  $r = 1$  а.е.

**Решение.** Световой поток Солнца  $\Phi_{\text{с}} = 3,75 \cdot 10^{28}$  лм, тогда освещённость на расстоянии  $r$ :

$$E_0 = \frac{\Phi_{\text{с}}}{4\pi \cdot r^2} = \frac{3,75 \cdot 10^{28} \text{ лм}}{4\pi \cdot (1,496 \cdot 10^{11} \text{ м})^2} = 1,33 \cdot 10^5 \text{ лк.}$$

**Ответ.** Освещённость от Солнца нормальной к лучам площадки на среднем расстоянии от Земли до Солнца составляет 133 тыс. люкс.

**Примечание.** Из-за атмосферы освещённость поверхности Земли в солнечный день уменьшается до 100 тыс. люкс.

✎ **Пример 10.** Сила света лампы накаливания мощностью  $P = 100$  Вт равна  $I = 10$  кд. Всего лишь одна лампа висит над центром обеденного стола на высоте  $h = 1,2$  м, размеры которого  $l = 140$  см,  $d = 85$  см. Вычислить максимальную и минимальную освещённость на столе и сравнить их. Чему равна облучённость стола в этих точках?

➔ **Решение.** Максимально освещён центр стола (рис. 7):

$$E_0 = \frac{I}{h^2} = \frac{10 \text{ кд}}{(1,2 \text{ м})^2} = 6,94 \text{ лк} \approx 7 \text{ лк},$$

а минимально – каждый из четырех углов  $M$  стола:

$$E_M = \frac{I \cdot \cos \alpha}{r^2}, \quad \cos \alpha = \frac{h}{r} \Rightarrow E_M = \frac{I \cdot h}{r^3}.$$

Расстояние от спирали лампы до угла стола:

$$r = \sqrt{h^2 + (l/2)^2 + (d/2)^2} = \sqrt{1,44 + 0,49 + 0,18} = 1,45 \text{ м}.$$

$$E_M = \frac{10 \text{ кд} \cdot 1,2 \text{ м}}{(1,45 \text{ м})^3} = 3,91 \text{ лк} \approx 4 \text{ лк}.$$

$$\frac{E_0}{E_M} = \frac{6,94}{3,91} = 1,77 \approx 1,8.$$

Облучённость (энергетическая освещённость) вычисляется по тому же закону:

$$E_e = \frac{I_e \cdot \cos \alpha}{r^2}.$$

Будем считать, что лампа светит и греет равномерно по всем направлениям, вычислим энергетическую силу излучения лампы

$$I_e = \frac{P}{\Omega_n} = \frac{P}{4\pi} = \frac{100 \text{ Вт}}{4\pi} = 7,96 \text{ Вт/ср}.$$

В центре стола энергетическая освещённость (а также плотность потока энергии):

$$E_{e0} = \frac{I_e}{h^2} = \frac{7,96 \text{ Вт/ср}}{(1,2 \text{ м})^2} = 5,5 \text{ Вт/м}^2.$$

Минимальная энергетическая освещённость будет на углу стола:

$$E_{eM} = \frac{I_e \cdot \cos \alpha}{r^2} = \frac{I_e \cdot h}{r^3} = \frac{7,96 \text{ Вт/ср} \cdot 1,2 \text{ м}}{(1,45 \text{ м})^3} = 3,1 \text{ Вт/м}^2.$$

Отметим, что плотность потока энергии в этом месте больше энергетической освещённости:

$$E_{e0r} = \frac{I_e}{r^2} = \frac{7,96 \text{ Вт/ср}}{(1,45 \text{ м})^2} \approx 3,8 \text{ Вт/м}^2. \leftarrow$$

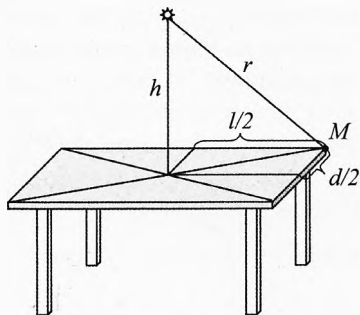


Рис. 7. Освещённость стола

✓ **Ответ.** Энергетическая освещённость (облучённость) стола  $E_e \in (3, 1; 5, 5)$  Вт/м<sup>2</sup> без учета отражённых от стен и потолка потоков света. Освещённость в центре стола равна 7 лк, а на углу стола в 1,8 раза меньше – 4 лк. Минимальная освещённость того угла, на который меньше всего падает поток рассеянного света от стен и потолка.

## § 49. Поверхностная яркость

Для протяжённых (не точечных) источников света вводится понятие *поверхностная яркость* или просто яркость  $B$ . В случае энергетических измерений вместо поверхностной яркости используется энергетическая яркость  $B_e$ . Понятие поверхностной яркости неприменимо для точечных источников, то есть источников, угловые размеры которых меньше разрешающей способности глаза или оптических инструментов, которыми он вооружен.

Яркость характеризует распределение силы света по излучающей поверхности: одни участки светящейся поверхности могут излучать с единицы площади больший (или меньший) световой поток, чем другие, в заданном направлении. Поэтому визуально они воспринимаются более яркими. Пятна на Солнце воспринимают более темными, то есть их яркость меньше, чем у соседних участков, потому что сила света их меньше, чем у более светлых участков. Разница в яркости светлых и темных участков обусловлена разностью их температур.

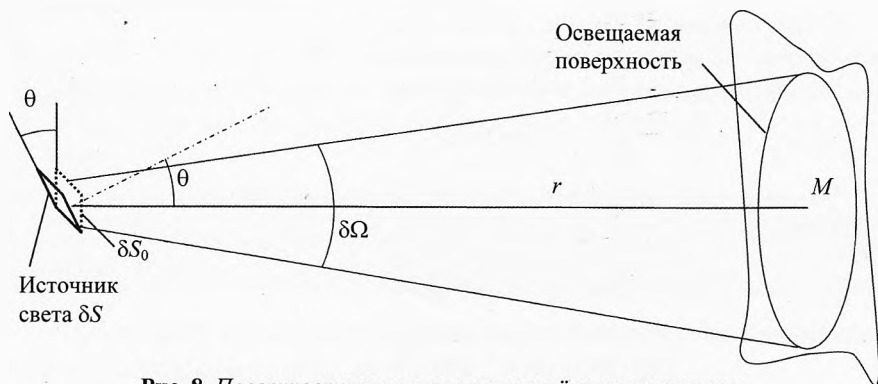


Рис. 8. Поверхностная яркость протяжённого источника

Рассмотрим светящуюся поверхность малой площади  $\delta S$ . Пусть нормаль к этой поверхности составляет угол  $\theta$  с направлением на освещаемую поверхность, находящуюся на расстоянии  $r$  от светящейся площадки (рис. 8). Изобразим наблюдаемую с точки  $M$  проекцию  $\delta S_0$  площадки  $\delta S$ , нормальную к  $r$ .

Из рисунка видно, что

$$\delta S_0 = \delta S \cdot \cos\theta.$$

Яркостью в заданном направлении  $\theta$  на освещаемую поверхность  $M$  считается отношение светового потока  $\delta\Phi_v$ , распространяющегося в телесном угле  $\delta\Omega$ , к видимой с точки наблюдения площади светящейся поверхности  $\delta S \cdot \cos\theta$ :

$$B = \frac{\delta\Phi_v}{\delta\Omega \cdot \delta S \cdot \cos\theta} \quad \text{или} \quad B = \frac{\delta\Phi_v}{\delta\Omega \delta S_0}.$$

**Яркость** характеризует распределение силы света по излучающей поверхности. Яркость численно равна световому потоку  $\delta\Phi_v$ , распространяющемуся в заданном направлении в единичном телесном угле  $\delta\Omega$ , излучаемому с единичной видимой площади светящейся поверхности  $\delta S_0$ .

Учитывая, что сила света, излучаемого площадкой  $\delta S$  в направлении нормали к ней, равна:

$$I = \frac{\delta\Phi_v}{\delta\Omega},$$

можно записать:

$$B = \frac{I}{\delta S \cdot \cos\theta} \quad \text{или} \quad B = \frac{I}{\delta S_0}. \quad (3)$$

**Яркость в данном направлении равна силе света, излучаемого с единицы видимой поверхности.**

Единица измерения яркости в СИ:

$$[B] = \frac{1 \text{ кд}}{1 \text{ м}^2} = \frac{1 \text{ лм}}{1 \text{ м}^2 \cdot \text{ср}}.$$

Кандела на квадратный метр равна яркости светящейся поверхности с площадки  $1 \text{ м}^2$  при силе света  $1 \text{ кд}$ .

Внесистемная единица измерения  $1 \text{ кд/см}^2$  носит название стильб (сб):

$$1 \text{ сб} = \frac{1 \text{ кд}}{1 \text{ см}^2} = 10^4 \frac{\text{кд}}{\text{м}^2}.$$

Из формулы (3) следует:

$$I = B \cdot \delta S \cdot \cos\theta \quad \text{или} \quad I = B \delta S_0.$$

**Сила света в данном направлении  $\theta$  равна произведению яркости и площади видимой поверхности.**



Таблица 3. Яркость различных светящихся тел

Источник света	Яркость $B$ , кд/м <sup>2</sup>
Ночное безлунное небо	около $1 \cdot 10^{-4}$
Неоновая лампа	$1 \cdot 10^3$
Полная луна, видимая сквозь атмосферу	$2,5 \cdot 10^3$
Пламя обычной стеариновой свечи	$5 \cdot 10^3$
Ясное дневное небо	$1,5 \cdot 10^4$
Газосветная лампа	$5 \cdot 10^4$
Металлический волосок лампы накаливания	$(1,5-2) \cdot 10^6$
Спираль газонаполненной лампы накаливания	$5 \cdot 10^6$
Кратер обычной угольной дуги	$1,5 \cdot 10^8$
Солнце	$1,5 \cdot 10^9$
Капиллярная ртутная дуга сверхвысокого давления	$4 \cdot 10^8$
Шаровая ртутная лампа сверхвысокого давления (СВДШ)	$1,2 \cdot 10^9$
Импульсная стробоскопическая лампа (ИСШ)	$1 \cdot 10^{11}$

**Зависимость освещённости от яркости и угловых размеров источника.** Пусть на расстоянии  $r$  от освещаемой поверхности  $M$  (площадью  $\delta S_M$ ) находится протяжённый источник света (рис. 9). Пусть нормаль участка поверхности источника малой площадью  $\delta S$  расположена под углом  $\theta$  к направлению на точку  $M$ . Определим, чему равна освещённость  $E$ , создаваемая на освещаемой поверхности.

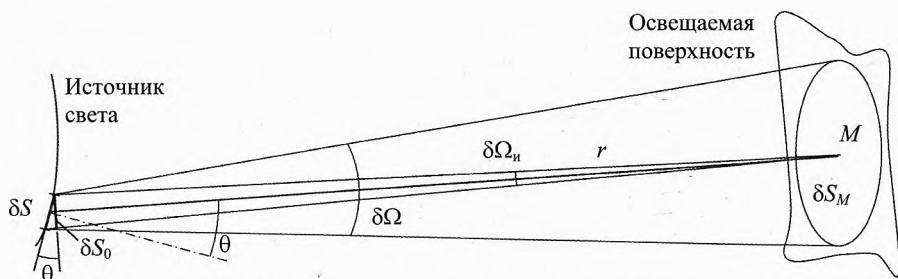


Рис. 9. Зависимость освещённости от яркости и угловых размеров источника

Освещённость равна отношению светового потока  $\delta \Phi_v$ , распространяющегося в телесном угле  $\delta \Omega$  к площади нормальной поверхности  $\delta S_M$ , на которую этот поток падает:

$$E = \frac{\delta \Phi_v}{\delta S_M}. \quad (4)$$

Из формулы по определению яркости  $B$  источника:

$$B = \frac{\delta \Phi_v}{\delta \Omega \cdot \delta S_0} \Rightarrow \delta \Phi_v = B \delta S_0 \delta \Omega, \quad (5)$$

где  $\delta S_0 = \delta S \cdot \cos \theta$  – видимая с освещаемой поверхности площадь светящейся поверхности.

Подставляя  $\delta \Phi_v$  из (5) в (4), получим:

$$E = \frac{B \cdot \delta S_0 \cdot \delta \Omega}{\delta S_M}.$$

Телесный угол, в котором распространяется свет к освещаемой площадке  $\delta S_M$ , равен  $\delta \Omega = \frac{\delta S_M}{r^2}$ , поэтому:

$$E = \frac{B \cdot \delta S_0}{r^2}.$$

Поскольку  $\delta \Omega_n = \frac{\delta S_0}{r^2}$  – телесный угловой размер видимой светящейся площадки  $\delta S$ , то окончательно получим:

$$E = B \cdot \delta \Omega_n.$$

*Освещённость, создаваемая поверхностью  $\delta S$  источника света, видимая под углом  $\theta$  к нормали площадки, равна произведению его яркости  $B$  и телесного угла  $\delta \Omega_n$ , под которым видна светящаяся площадка.*

Другими словами, чем больше яркость  $B$  участка видимой светящейся поверхности и чем больше его угловой размер  $\delta \Omega_0$ , тем большую освещённость  $E$  он создаёт на освещаемой поверхности.

Если речь идёт об освещённости, создаваемой всей поверхностью источника, то под  $B$  понимается средняя яркость, а под  $\delta \Omega_0$  – видимый угловой размер светящейся части поверхности источника. Например, измеряя освещённость, создаваемую Луной (или Венерой), нужно брать телесный угол, под которым видна не вся Луна (или Венера), а только нормальная проекция её светящейся части поверхности.

**Пример 11.** Видимый угловой диаметр Луны равен  $\delta = 0,5^\circ$ . Вычислить освещённость, которую создаёт Луна на нормальной площадке поверхности Земли.

**Решение.** Согласно таблице 2, полная Луна, видимая сквозь атмосферу, имеет яркость  $B = 2,5 \cdot 10^3$  кд/м<sup>2</sup>.

$$E = B \cdot \Omega_L, \quad \Omega_L = \frac{\pi \delta^2}{4} = 0,196 (^\circ)^2 = \frac{0,196 \text{ ср}}{3282,8} = 5,98 \cdot 10^{-5} \text{ ср.}$$

$$E = 2,5 \cdot 10^3 \text{ кд/м}^2 \cdot 5,98 \cdot 10^{-5} \text{ ср} \approx 0,15 \text{ лк.}$$

**Ответ.** На нормальной площадке поверхности Земли Луна создаёт освещённость, равную 0,15 лк.

## § 50. Блеск светила, звёздная величина

Освещённость, которая создаётся разными звёздами в глазу наблюдателя, расположенного нормально к лучам, может заметно отличаться. Поэтому глаз воспринимает их «блестящими» по-разному.

*Глазомерная оценка светового потока, приходящего в глаз наблюдателя, называется блеском светила.*

Впервые понятие блеск светил ввёл древнегреческий астроном, географ и математик Гиппарх во II веке до нашей эры.



Гиппарх Никейский  
(ок. 190–120 до н. э.)

*Самые яркие звёзды он назвал звёздами первой величины, а едва различимые стандартным глазом – шестой звёздной величины.*

По латыни *magnitudo* – величина, поэтому звёздные величины обозначаются индексом *m*, который ставят сверху числового значения. Например, видимая звёздная величина Полярной звезды равна примерно  $m_p = 2^m$  или блеск Полярной звезды примерно равен  $2^m$  (два *m*).

Глаз реагирует на световой поток, прошедший через отверстие зрачка, не прямо пропорционально, а согласно **психофизическому закону Вебера–Фехнера**.

*При изменении внешнего раздражения в геометрической прогрессии органы чувств, зрения и слуха передают соответствующие ощущения в мозг в арифметической прогрессии.*

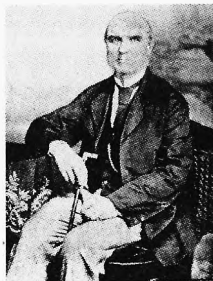
Поэтому в шкале введённой Гиппархом освещённости звёзд от первой до шестой величины оказались убывающими в геометрической прогрессии. Понятно, что оценки, сделанные Гиппархом на глаз, были не очень точными. Измерения, проведённые в середине XIX века, показали, что разности в 5 звёздных величин по шкале Гиппарха соответствуют отношению освещённостей почти в 100 раз.

В 1857 г. английский астроном Н. Р. Погсон предложил для шкалы звёздных величин принять выражение:

$$\frac{E_0}{E} \approx 2,512^{(m-m_0)}. \quad (6)$$

Если  $m_0 = 1$ , а  $m = 6$ , то:

$$\frac{E_0}{E} = 2,512^{(6-1)} = 100.$$



Норман Роберт Погсон (1829–1891)

Прологарифмируем (6):

$$\lg \frac{E_0}{E} = 0,4(m - m_0)$$

$$\text{или } m = 2,5 \cdot \lg \frac{E_0}{E} + m_0.$$

Если за ноль отсчёта взять звезду нулевой звёздной величины  $m_0 = 0$  (например звезда Вега  $m_B = 0,03$ ), то для значения видимой звёздной величины получим:

$$m = 2,5 \cdot \lg \frac{E_0}{E}.$$

*Видимый блеск звезды равен 2,5 логарифма отношения освещённости  $E_0$ , создаваемой звездой нулевой звёздной величины, к освещённости  $E$  данной звезды.*

Обычно нуль-пункт ( $m_0 = 0$ ) шкалы звёздных величин принимают по совокупности звёзд, тщательная фотометрическая оценка которых выполнена различными методами.

Очевидно, что звёздная величина является безразмерной.

**Блеск светила** – это скалярная физическая величина, являющаяся субъективной визуальной оценкой светового потока, приходящего в глаз наблюдателя. Блеск измеряется в видимых звёздных величинах  $m$ .

Из (6) легко получить потенцированием более удобное выражение для формулы Погсона:

$$\frac{E_0}{E} = 10^{0,4(m - m_0)}.$$

Формула Погсона позволяет определять звёздные величины светил и более ярких, чем нулевой звёздной величины. Для них блеск  $m$  принимает отрицательные значения. Понятно, что её можно применять для светил с дробными значениями звёздной величины.

Для двух звёзд блеском  $m_1$  и  $m_2$ :

$$\frac{E_1}{E_2} = 10^{0,4(m_2 - m_1)} \quad \text{или} \quad \frac{E_1}{E_2} \approx 2,512^{(m_2 - m_1)}.$$

Понятие звёздной величины можно применять не только для звёзд, но и любых других светил от светлячка до Солнца и др. В таблице 3 приведены интегральные фотометрические характеристики некоторых объектов.

**Таблица 4. Интегральные фотометрические характеристики некоторых объектов**

Объект	Звёздная величина	Телесный угол, стерadian
Солнце	$-26,7^m$	$6,7 \cdot 10^{-5}$
Луна (в полнолунии)	$-12,74^m$	$6,6 \cdot 10^{-5}$
Меркурий (максимум)	$-2,45^m$	$1,4 \cdot 10^{-9}$
Венера (максимум)	$-4,67^m$	$2,5 \cdot 10^{-8}$
Марс (максимум)	$-2,91^m$	$3,8 \cdot 10^{-9}$
Юпитер (максимум)	$-2,94^m$	$3,4 \cdot 10^{-8}$
Вега	$-0,03^m$	—
Сатурн без колец (максимум)	$+0,7^m$	$5,7 \cdot 10^{-9}$
1 кв. град. ясного безлунного ночного неба (в зените)	$+3,5^m$	$3 \cdot 10^{-4}$
Уран в противостоянии	$+5,5^m$	$2,7 \cdot 10^{-10}$
Самые слабые звёзды, наблюдаемые невооружённым глазом	от $+6^m$ до $+7,72^m$	—
Нептун	$+7,8^m$	$9,8 \cdot 10^{-11}$
Плутон	$+15,1^m$	$3 \cdot 10^{-12}$

Часто требуется перевести звёздные величины в энергетические величины потока или освещённости. Звезда, блеск которой равен  $0^m$ , создаёт на границе Земной атмосферы энергетическую освещённость (плотность потока энергии):

$$E_{e0} = 2,48 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2.$$

Максимальная спектральная плотность потока излучения на длине волны  $\lambda = 555 \text{ нм}$  равна:

$$\frac{\Delta E_{e0}}{\Delta \lambda} = 3,75 \cdot 10^{-12} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{Å)}.$$

Это означает, что на длине волны  $555 \text{ нм}$  (зелёный цвет) на ширине спектра  $\Delta \lambda = 1 \text{ Å}$  от звезды блеском  $0^m$  приходит  $3,75 \cdot 10^{-12} \text{ Вт}$  на каждый метр квадратной нормальной к лучам поверхности.

Звезда, блеск которой равен  $0^m$ , на границе Земной атмосферы создаёт освещённость  $2,5 \cdot 10^{-6} \text{ лк}$  (как свеча силой света  $1 \text{ кд}$  на расстоянии  $600 \text{ м}$ ).

Звёздная величина, полученная на основе определения полной энергии, излучаемой во всём спектре, называется болометрической звёздной величиной.

Болометр (от греч. *bole* – бросок, луч и *metreo* – измеряю) – прибор для измерения лучистой энергии, воздействие которой изменяет сопротивление его чувствительного элемента. Термочувствительными элементами служат: тонкий слой металла ( $0,1$ – $1 \text{ мкм}$ ), полупроводниковые материалы (термисторы) или тонкая проволока из сверхпроводника (сверхпроводящий болометр). Порог чувствительности болометра до  $10 \text{ пВт}$  ( $10^{-11} \text{ Вт}$ ).

## § 51. Определение расстояний до небесных светил

Классический способ определения расстояний был и остается угломерный геометрический способ, основанный на параллактическом смещении.

**Параллактическим смещением** называется изменение направления на предмет при перемещении наблюдателя из одной точки в другую.

Расстояние между этим точками  $AB$  называется базисом, оно должно быть известно. Расстояние  $AB$  должно быть как можно больше, а соединяющий их отрезок должен составлять с направлением на наблюдаемый объект угол, по возможности близкий к прямому, чтобы параллактическое смещение было максимальным.

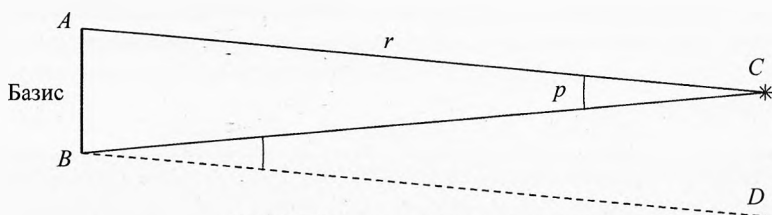


Рис. 10. Параллактическое смещение

Из рис. 10 видно, что параллактическое смещение равно углу  $\angle CBD = \angle ACB = p$ , называемому параллаксом, под которым базис  $AB$  виден из точки  $C$ .

Расстояние  $r = AC$  до точки  $C$  легко найти. Если  $AB \ll AC$ , то  $p \approx \frac{AB}{AC}$ .

Параллакс измеряется в радианах. Значит:

$$r \approx \frac{AB}{p}.$$

**Определение расстояния в Солнечной системе.** При измерениях в Солнечной системе в качестве базиса удобно брать радиус Земли  $R_3 = AO$ .

Расстояние  $r$  от центра Земли до центра светила  $S$  равно (рис. 11):

$$\sin p = \frac{R_3}{r} \Rightarrow r = \frac{R_3}{\sin p}.$$

При малых углах  $\sin p \approx p$ , если параллакс  $p$  измеряется радианах.

Если параллакс выразить в угловых секундах  $p''$ , то

$$\sin p = p'' \cdot \sin(1'') \approx \frac{p''}{206265''}.$$

Тогда расстояние от Земли до светила:

$$r \approx \frac{206265''}{p''} \cdot R_3.$$

Угол, под которым со светила виден радиус Земли, перпендикулярный лучу зрения, называется **горизонтальным параллаксом**.

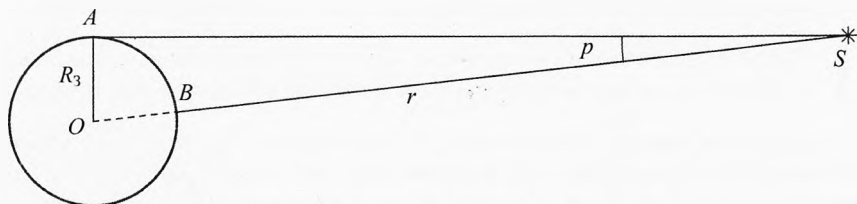


Рис. 11. Определение расстояния в Солнечной системе

Чем больше расстояние до светила, тем меньше его параллакс  $p$ . Этот угол равен параллактическому смещению светила для наблюдателей, находящихся в точках  $A$  и  $B$ . Этот угол удобно определить по равному ему углу  $\angle CBD$  на рис. 10.

**Пример 12.** Горизонтальный параллакс Солнца (угол, под которым виден с центра Солнца радиус Земли, перпендикулярный лучу зрения) равен  $8,8''$ , когда Земля находится на расстоянии 1 а.е. от Солнца (это бывает 2 раза в год, когда Земля проходит через малую ось своей орбиты). Вычислить значение астрономической единицы, принять радиус Земли 6370 км.

**Решение.**  $r \approx \frac{206265''}{p''} \cdot R_З = \frac{206265''}{8,8''} \cdot 6370 \text{ км} = 149 \cdot 10^6 \text{ км}.$

**Ответ.** Среднее расстояние от Земли до Солнца примерно равно 150 миллионов километров.

Более точно **астрономическая единица** равна

$$1 \text{ а.е.} = 149\,597\,870 \text{ км}$$

Параллакс называется горизонтальным, видимо потому, что одно измерение (в точке  $A$ ) нужно делать, когда центр Солнца находится на горизонте (восход или закат Солнца).

**Пример 13.** На каком расстоянии от Земли находится Сатурн, когда его горизонтальный параллакс равен  $0,90''$ ?

**Решение.**  $r_c \approx \frac{206265''}{p''} \cdot R = 1,46 \cdot 10^9 \text{ км} = 9,78 \text{ а.е.}$

**Ответ.** Расстояние от Земли до Сатурна около 10 а.е.

✎ **Пример 14.** Определить угловой диаметр Луны, когда она находится на среднем расстоянии от Земли  $r = 384400$  км. Диаметр Луны  $d = 3476$  км?

➔ **Решение.**  $\delta = \frac{d}{r} = \frac{3476}{384400} = 9,043 \cdot 10^{-3} = 31' \approx 0,5^\circ$ .

✓ **Ответ.** Диск Луны виден под углом  $31'$ , когда расстояние от Луны до Земли равно большей полуоси её орбиты.

**Годичный параллакс и расстояние до звёзд.** Звёзды находятся так далеко от Земли, что её радиус слишком мал в качестве базиса. Поэтому для измерения расстояний до звёзд используется большая полуось Земной орбиты, 1 а.е. Если засечь положение звезды в диаметрально противоположных точках орбиты Земли, то расстояние между ними будет равно 2 а.е. Пусть этот диаметр орбиты перпендикулярен лучу зрения от звезды. Из рис. 12 видно, что:

$$2 \sin p = \frac{2a_3}{r} \Rightarrow \sin p = \frac{a_3}{r} \Rightarrow r = \frac{a_3}{\sin p},$$

где  $p$  — измеряется в радианах.

Расстояние до звёзд таким способом можно измерять, когда удаётся измерить годичный параллакс звезды.

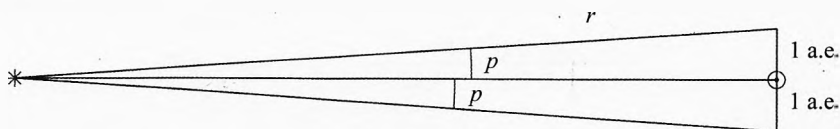


Рис. 12. Годичный параллакс

*Годичным параллаксом  $p$  звезды называется угол, под которым со звезды видна большая полуось земной орбиты, равной 1 а. е., если она перпендикулярна лучу зрения.*

Поскольку годичные параллаксы всех звёзд очень малы, то  $\sin p = p'' \cdot \sin 1'' = \frac{p''}{206265}$ . Тогда расстояние до звезды:

$$r = \frac{a_3 \cdot 206265''}{p''}.$$

Два штриха над параллаксом означает, что он измерен в угловых секундах.



✎ **Пример 15.** Годичный параллакс ближайшей к нам звезды  $\alpha$  в созвездии Центавра равен  $0,75''$ . Определить расстояние до неё.

➡ **Решение.**  $r_{\alpha\alpha} = \frac{1 \text{ а.е.} \cdot 206265''}{0,75''} = 275020 \text{ а.е.} = 4,1 \cdot 10^{13} \text{ км.}$  ⤵

✓ **Ответ.** Расстояние до ближайшей к Солнцу звезды равно 275 тысяч расстояний от Земли до Солнца или 41 триллион километров. Заметим, как далеко от Солнечных земель находится ближайшая звезда!

**Парсек и световой год.** Астрономическая единица для измерения межзвёздных расстояний мала, поэтому вводится ещё две единицы: 1 световой год (св. г.) и 1 парсек (пк).

**Световой год** – это расстояние, которое пролетает свет в вакууме за 1 год:

$$1 \text{ св. г.} = c \cdot T_3 = 299792,5 \text{ км/с} \cdot 365,2422 \cdot 86400 \text{ с.}$$

$$1 \text{ св.г.} = 9,46 \cdot 10^{12} \text{ км}$$

**Парсек** – это расстояние, с которого большая полуось Земной орбиты перпендикулярная лучу зрения, видна под углом в одну угловую секунду:

$$1 \text{ ПК} = \frac{1 \text{ а.е.} \cdot 206265''}{1''} = 206265 \text{ а.е.} = 3,0857 \cdot 10^{13} \text{ км.}$$

$$1 \text{ ПК} = 3,086 \cdot 10^{13} \text{ км}$$

Как видно, парсек и световой год – это величины одного порядка:

$$1 \text{ ПК} = 3,26 \text{ св.г.}$$

**Техническое отступление.** Вычислим синус одной угловой секунды. Выразим одну угловую секунду в радианах.

$$1 \text{ рад} = \frac{360^\circ}{2\pi}, \quad 1^\circ = 3600'';$$

$$\Rightarrow 1 \text{ рад} = \frac{360 \cdot 3600''}{2\pi} = 206264,8''; \Rightarrow 1'' = \frac{1 \text{ рад}}{206264,8};$$

При малых углах синус угла равен самому углу в радианной мере:

$$\sin(1'') = \frac{1}{206264,8}$$

или

$$\sin(1'') \approx \frac{1}{206265}$$

## § 52. Абсолютная звёздная величина. Светимость звёзд

**Светимость.** После того, как астрономы научились определять расстояние до звёзд, было установлено, что блеск звезды зависит от расстояния до неё и светимости. Оптическая светимость звезды  $L_v$  — это полный световой поток, излучаемый звездой:

$$L_v \equiv \Phi_{v,\text{полный}}.$$

Оптическая светимость измеряется в люменах, например, оптическая светимость Солнца  $L_{Cv} = 3,75 \cdot 10^{28}$  лм.

Когда научились измерять плотность потока излучения звезды по всему спектру излучаемых волн была введена энергетическая светимость. Энергетическая светимость звезды равна мощности её излучения или потоку излучения по всевозможным частотам:

$$L_e \equiv \Phi_{e,\text{полный}}.$$

Например, энергетическая светимость Солнца  $L_{Ce} = 3,846 \cdot 10^{26}$  Вт.

У жёлтых и зелёных звёзд отношение оптической светимости и энергетической светимости примерно одинаково.

Для удобства кроме светимости (абсолютной) вводится относительная светимость.

**Относительная светимость** равна отношению светимости данной звезды к светимости Солнца:

$$L_{\text{отн}} = \frac{L}{L_C}.$$

Например, если идёт речь об относительно оптической светимости, то

$$L_{\text{отн}v} = \frac{L_v}{L_{Cv}}.$$

А если об относительно энергетической светимости, то

$$L_{\text{отн}e} = \frac{L_e}{L_{Ce}}.$$

Для жёлтых и зелёных звёзд относительная оптическая и энергетическая светимости примерно одинаковы.

Поскольку люди не любят много индексов, то как правило стремятся свести их к минимуму. Например, в условии задачи могут написать: «Светимость звезды  $L = 50$ ». Здесь нужно понимать, что речь идёт об относительной светимости, хотя об этом ни словом, ни индексом не отмечено. Идёт ли речь об оптической или энергетической светимости нужно догадываться из текста задач.

**Зависимость видимой звёздной величины от расстояния до звезды и силы света.** Получим связь между видимыми звёздными величинами двух

звёзд  $m_1$  и  $m_2$  и расстоянием до них. Согласно формуле Погсона, отношение освещённостей, создаваемых двумя звёздами в глазу наблюдателя:

$$\frac{E_1}{E_2} = 10^{0,4(m_2 - m_1)}. \quad (7)$$

С другой стороны, согласно закону для максимальной освещённости от точечного источника  $E = \frac{I}{r^2}$  (а все звезды являются таковыми), запишем:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{I_1 r_2^2}{I_2 r_1^2}. \quad (8)$$

Из (7) и (8) получим:

$$10^{0,4(m_2 - m_1)} = \frac{I_1}{I_2} \cdot \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2.$$

Прологарифмируем это выражение:

$$\begin{aligned} 0,4(m_2 - m_1) &= \lg \left( \frac{I_1}{I_2} \cdot \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right), \Rightarrow m_2 - m_1 = 2,5 \cdot \lg \left( \frac{I_1}{I_2} \cdot \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right). \\ \Rightarrow m_2 - m_1 &= 2,5 \left( \lg \frac{I_1}{I_2} + 2 \cdot \lg \frac{r_2}{r_1} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) видно, что разность звёздных величин двух звёзд линейно зависит от логарифма отношения силы света первой звезды ко второй и от удвоенного логарифма отношения расстояния до второй и первой звезды.

**Абсолютная звездная величина.**

*Видимая звёздная величина, которую имела бы звезда, если бы находилась от нас на стандартном расстоянии  $r_0 = 10$  пк, называется абсолютной звёздной величиной и обозначается буквой  $M$ :*

$$m_{\text{абс}} \equiv M.$$

Запишем формулу Погсона для одной звезды на двух расстояниях: реальном  $r$  и стандартном  $r_0 = 10$  пк:

$$\frac{E}{E_0} = 10^{0,4(M - m)}. \quad (10)$$

С другой стороны, отношение освещённостей глаза наблюдателя на расстояниях  $r$  и  $r_0$  от одной и той же звезды выразим через закон освещённости:

$$\frac{E}{E_0} = \frac{r_0^2}{r^2}. \quad (11)$$

Из (10) и (11) получим:

$$10^{0,4(M-m)} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2.$$

Прологарифмируем это выражение:

$$0,4(M-m) = 2\lg r_0 - 2\lg r, \Rightarrow M = m + 5\lg r_0 - 5\lg r.$$

Поскольку  $r_0 = 10$  пк выражено в парсеках, то  $r$  тоже должно быть выражено в парсеках. То абсолютная звёздная величина звезды:

$$M = m + 5 - 5\lg r, \text{ где } [r] = \text{пк.} \quad (12)$$

Напомним, что парсек – это расстояние с которого большая полуось Земной орбиты ( $a_3 = 149,6 \cdot 10^6$  км = 1 а.е.) видна нормально лучу зрения под углом в 1 угловую секунду.

Если расстояние до звезды измеряется в парсеках, то его легко выразить через годичный параллакс:

$$r = \frac{1}{p''}. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), получим:

$$M = m + 5 + 5\lg p''.$$

✎ **Пример 16.** Блеск самой яркой звезды северного полушария Веги ( $\alpha$  Лиры)  $m = 0,03^m$ , а расстояние до неё  $r = 8,1$  пк. Чему равна её абсолютная звёздная величина?

✎ **Решение.** Согласно (12) абсолютная звёздная величина:

$$M = m + 5 - 5\lg(r) = 0,49^m.$$

Если бы Вега действительно находилась бы от нас на стандартном расстоянии 10 пк (на 23% дальше), то сияла бы в 1,5 раза слабее:

$$\frac{E_r}{E_{r_0}} = 10^{0,4(M-m)} \approx 1,5. \leftarrow$$

✓ **Ответ.** Абсолютная звёздная величина Веги  $M = 0,49^m$ .

✎ **Пример 17.** Вычислить абсолютную звёздную величину Солнца, если на расстоянии  $r = 1$  а.е. от Земли его блеск равен  $m = -26,7^m$ .

✎ **Решение.**  $M = m + 5 - 5\lg(r) = -26,7 + 5 - 5\lg \frac{1 \text{ пк}}{206265} = 4,87^m. \leftarrow$

✓ **Ответ.** Если Солнце удалить от Земли на расстояние 10 пк, то оно будет наблюдаться, как звезда с блеском  $4,87^m$ .

**Связь относительной оптической светимости звезды с её абсолютной звёздной величиной.** Относительная оптическая светимость звезды равна отношению её светимости к светимости Солнца:

$$L_{\text{отн}} = \frac{L}{L_{\text{с}}}.$$

Максимальная освещённость, которую создаёт звезда в глазу наблюдателя, прямо пропорциональна её оптической светимости. Если звёзды находятся на одинаковом расстоянии, то:

$$\frac{L}{L_{\text{с}}} = \frac{E}{E_{\text{с}}} = 10^{0,4(M_{\text{с}} - M)}.$$

Тогда

$$L_{\text{отн}} = 10^{0,4(M_{\text{с}} - M)} = 10^{0,4(4,77 - M)} \quad (14)$$

**Пример 18.** Вычислить относительную светимость Веги, если абсолютная звёздная величина Веги  $M = 0,49^m$ , а Солнца  $M_{\text{с}} = 4,77^m$ .

✎ **Решение.**  $L_{\text{отн}} = \frac{L}{L_{\text{с}}} = 10^{0,4(4,77 - 0,49)} = 51,5.$  ✎

✓ **Ответ.** Светимость Веги в 51,5 раза больше, чем Солнца.

**Пример 19.** Температура Веги  $T = 10\,600\text{ К}$ , относительная светимость  $L_{\text{отн}} = 51,5$ . Вычислить радиус Веги, если известно, что температура фотосферы Солнца  $T_{\text{с}} = 5800\text{ К}$ , а его радиус равен  $R_{\text{с}} = 6,96 \cdot 10^5\text{ км}$ . Солнце и Вегу считать абсолютно чёрными телами.

✎ **Решение.** Согласно закону Стефана–Больцмана  $j = \sigma \cdot T^4$ .

Площадь поверхности звезды:  $S = 4\pi R^2$ , где  $R$  – её радиус.

Светимость звезды равна произведению плотности потока энергии звезды и площади её поверхности:

$$L = j \cdot S = \sigma \cdot T^4 \cdot 4\pi R^2.$$

$$L_{\text{отн}} = \frac{L}{L_{\text{с}}} = \frac{\sigma \cdot T^4 \cdot 4\pi R^2}{\sigma \cdot T_{\text{с}}^4 \cdot 4\pi R_{\text{с}}^2} = \frac{T^4 \cdot R^2}{T_{\text{с}}^4 \cdot R_{\text{с}}^2}.$$

$$\Rightarrow R = R_{\text{с}} \cdot \sqrt{L_{\text{отн}}} \cdot \left(\frac{T_{\text{с}}}{T}\right)^2 = 1,5 \cdot 10^6\text{ км.} \quad \text{✎}$$

✓ **Ответ.** Радиус Веги равен 1,5 миллиона километров. Он больше радиуса Солнца примерно 2,15 раза.

## § 53. Пространственные скорости звёзд

Все звёзды движутся, но от Солнца они так далеки, что смещение их друг относительно друга даже за человеческую жизнь на глаз практически незаметно. Любая звезда движется относительно нас под некоторым углом к лучу зрения (рис. 13). Её скорость  $\vec{v}$  относительно Солнца можно представить в виде двух составляющих  $\vec{v}_\tau$  – тангенциальная составляющая скорости по небесной сфере, и радиальная составляющая скорости  $\vec{v}_r$ .

Вектор скорости звезды:  $\vec{v} = \vec{v}_\tau + \vec{v}_r$ .

Модуль скорости звезды:  $v = \sqrt{v_\tau^2 + v_r^2}$ .

Радиальную составляющую её скорости  $\vec{v}_r$  найдём используя эффект Доплера, согласно которому длина волны  $\lambda_0$  излучения звезды воспринимается землянами в соответствии с формулой:

$$\lambda = \lambda_0 \left( 1 \pm \frac{v_r}{c} \right),$$

где  $c$  – скорость света в вакууме, знак «+» ставится, когда звезда удаляется, а знак «-» – когда приближается.

Пусть в нашем случае звезда удаляется от Земли:

$$\lambda = \lambda_0 \left( 1 + \frac{v_r}{c} \right) \Rightarrow \lambda - \lambda_0 = \lambda_0 \cdot \frac{v_r}{c} \Rightarrow v_r = c \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}.$$

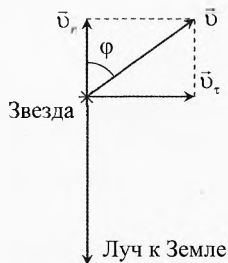


Рис. 13. Скорость звезды

**Радиальная скорость звезды равна относительному изменению длины волны, умноженному на скорость света.**

Касательную (тангенциальную) составляющую скорости звезды  $\vec{v}_\tau$  определим по видимому перемещению звезды на небесной сфере относительно но далеких заметно не смещающихся звёзд:

$$v_\tau = \frac{l_\tau}{t}.$$

**Собственным движением**  $\mu$  звезды называется её видимое угловое смещение по небу за один Земной год:

$$\mu = \alpha_r.$$

Из рис. 14 видно, что  $l_\tau = \alpha \cdot r$ . Значит:  $v_\tau = \frac{\alpha \cdot r}{t}$ .

Если  $t = T_\oplus$  – Земной год, тогда  $\alpha = \alpha_r = \mu$ . Значит,

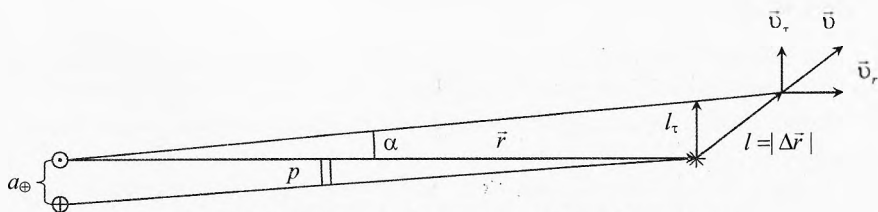


Рис. 14. Собственное движение и годичный параллакс

$$v_{\tau} = \frac{\mu r}{T_{\oplus}}. \quad (15)$$

Расстояние от Земли до звезды найдём, измерив годичный параллакс  $p$  звезды:

$$r = \frac{a_{\oplus}}{p}. \quad (16)$$

Подставим (16) в (15):

$$v_{\tau} = \frac{\mu \cdot a_{\oplus}}{p \cdot T_{\oplus}} = \frac{\mu \cdot 149,6 \cdot 10^6 \text{ км}}{p \cdot 3,156 \cdot 10^7 \text{ с}} = 4,74 \cdot \frac{\mu}{p} \text{ км/с},$$

где собственное движение звезды  $\mu$  и параллакс  $p$  измеряется в угловых секундах.

Итак, тангенциальная скорость звезды определяется по её собственному движению  $\mu$  и годичному параллаксу  $p$ :

$$v_{\tau} = 4,74 \cdot \frac{\mu}{p} \text{ км/с}.$$

**Пример 20.** Параллакс звезды Веги равен  $p = 0,13''$ , лучевая скорость  $v_r = -14 \text{ км/с}$ , а собственное движение  $\mu = 0,35''$  в год. С какой скоростью Вега движется относительно Солнца? Когда расстояние окажется минимальным до Солнца? Чему оно будет равно? Какой путь пройдет Вега за это время? Чему будет равен её блеск, если сейчас её блеск  $0,03^m$ ?

**Решение.** Вычислим сначала тангенциальную составляющую скорости:

$$v_{\tau} = 4,74 \cdot \frac{\mu}{p} \text{ км/с} = 4,74 \cdot \frac{0,35}{0,13} \text{ км/с} \approx 12,8 \text{ км/с}.$$

Поскольку  $v_r$  отрицательна, значит, Вега приближается к Солнцу, её скорость направлена к радиус-вектору под углом  $\varphi$  (рис. 15):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_{\tau}}{v_r} = \frac{12,8}{14} = 0,91, \quad \varphi = 42^{\circ}.$$

Скорость Веги равна:

$$v = \sqrt{v_t^2 + v_r^2} = \sqrt{(12,8)^2 + (14)^2} = 19 \text{ км/с.}$$

Расстояние до Веги в настоящий момент:

$$r = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,13} = 7,7 \text{ пк.}$$

Путь, который ей надо пройти до минимального расстояния:

$$S = r \cdot \cos \varphi = 7,7 \cdot \cos 42^\circ = 5,7 \text{ пк.}$$

До максимального сближения потребуется время:

$$t = \frac{S}{v} = \frac{5,7 \text{ пк}}{19 \text{ км/с}} = \frac{5,7 \cdot 3,086 \cdot 10^{13} \text{ км}}{19 \text{ км/с}} =$$

$$= 9,26 \cdot 10^{12} \text{ с} = 2,9 \cdot 10^5 \text{ лет.}$$

Через 290 тысяч лет расстояние до Веги станет минимальным:

$$r_{\min} = r \cdot \sin \varphi = 7,7 \cdot \sin 42^\circ = 5,15 \text{ пк.}$$

Найдём максимальный блеск Веги, который будет на минимальном расстоянии  $r_{\min}$ . Согласно закону освещённости и формуле Погсона:

$$\frac{E_{\max}}{E} = \left( \frac{r}{r_{\min}} \right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \varphi}, \quad \text{и} \quad \frac{E_{\max}}{E} = 10^{0,4(m - m_{\min})}.$$

Приравняв правые части этих выражений, получим:

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} = 10^{0,4(m - m_{\min})} \Rightarrow m_{\min} = m + 5 \cdot \lg(\sin \varphi) = -0,84^m.$$

✓ **Ответ.** Скорость Веги относительно Солнца 19 км/с. Максимальный блеск Веги  $-0,84^m$  будет на Земле через 290 тысяч лет. За это время Вега пройдет путь 5,7 пк, а расстояние до Солнца станет равным 5,15 пк.

✎ **Пример 21.** Самая далекая из ярких звёзд на нашем небе Денеб находится на расстоянии  $r = 802 \pm 66$  пк. Её блеск  $m = 1,25^m$ . Температура поверхности звезды  $T = 8525$  К. Чему равны радиус звезды и относительная светимость? Абсолютная звёздная величина Солнца  $M_C = 4,77^m$ , а температура фотосферы сферы  $T_C = 5780$  К.

✎ **Решение.** Вычислим сначала абсолютную звёздную величину Денеба:

$$M = m + 5 - 5 \cdot \lg(r) = 1,25 + 5 - 5 \cdot \lg(802) = -8,27^m.$$

Относительная светимость Денеба из формулы (14):

$$L_{\text{отн}} = 10^{0,4 \cdot (4,77 - M)} = 10^{0,4 \cdot (4,77 - (-8,27))} = 164\,400.$$

$$\Rightarrow L_{\text{Денеба}} = 164\,400 \cdot L_{\text{Солнца}}.$$

Светимость звезды есть полная мощность её излучения, равная произведению интегральной плотности потока излучения  $j = \sigma \cdot T^4$  и площади поверхности звезды  $S = 4\pi R^2$ :

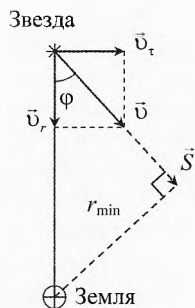


Рис. 15. Движение Веги



$$L = j \cdot S = \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2.$$

Относительная светимость Денеба:

$$L_{\text{отн}} = \frac{L_{\text{Денеба}}}{L_{\text{Солнца}}} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^4 \cdot \left(\frac{R}{R_c}\right)^2,$$

$$\Rightarrow R = R_c \cdot \left(\frac{T_c}{T}\right)^2 \cdot \sqrt{L_{\text{отн}}} = R_c \cdot \left(\frac{5780}{8525}\right)^2 \cdot \sqrt{164\,400} = 186 \cdot R_c. \leftarrow$$

✓ **Ответ.** Денеб светит, как 164 тысячи Солнц, его радиус в 186 раз больше радиуса Солнца.

Желающим предлагаем вычислить данные величины с погрешностью, обусловленной погрешностью измерения расстояния  $r$  до Денеба, указанной в условии задачи.

✍ **Пример 22.** Температура Полярной звезды  $T = 7000$  К, видимая звёздная величина  $m = 1,97^m$ , радиус равен тридцати радиусам Солнца:  $R = 30 \cdot R_c$ . Вычислить расстояние до звезды и её светимость.

➔ **Решение.** Относительная светимость Полярной звезды:

$$L_{\text{отн}} = \frac{L}{L_{\text{Солнца}}} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^4 \cdot \left(\frac{R}{R_c}\right)^2 = 1936 \approx 2 \cdot 10^3.$$

Абсолютная звёздная величина из формулы (14):

$$L_{\text{отн}} = 10^{0,4 \cdot (4,77 - M)}; \Rightarrow M = 4,77 - 2,5 \lg(L_{\text{отн}}) = -3,45^m.$$

Расстояние до Полярной звезды:

$$M = m + 5 - 5 \cdot \lg(r); \Rightarrow r = 10^{0,2(m-M)+1} = 120 \text{ пк.} \leftarrow$$

✓ **Ответ.** Полярная звезда – это гигант более горячий, чем Солнце, который светит в 2000 раз больше, чем Солнце, и находится на расстоянии примерно 120 парсек.



## Упражнения

**1** Масса Солнца уменьшается за счёт испускания: 1) только заряженных частиц; 2) только незаряженных частиц; 3) только электромагнитных волн различного диапазона; 4) частиц и электромагнитных волн?

**2** На плоскую поверхность металлического катода нормально падает монохроматический свет длиной волны  $\lambda = 500$  нм и интенсивностью  $j = 100$  Вт/см<sup>2</sup>. Определить количество фотонов ежесекундно падающих на 1 см<sup>2</sup> фотокатода.

**3** При какой температуре двухатомного газа кинетическая энергия одной молекулы будет равна энергии фотона с длиной волны  $\lambda = 589$  нм?

**4** Воду массой  $m = 1$  кг за время  $\tau = 350$  с нагрели на  $\Delta t = 5^\circ\text{C}$  электромагнитным излучением длиной волны  $\lambda = 3,3 \cdot 10^{-7}$  м. За какое время  $t$  источник излу-

часть  $N = 10^{20}$  фотонов? Считать, что излучение полностью поглощается водой. Удельная теплоемкость воды  $c_v = 4200$  Дж/(кг·К).

**5** Человеческий глаз воспринимает в темноте световой поток, равный  $\Phi_v = 10^{-13}$  лм, диаметр зрачка глаза человека в темноте равен  $d = 8$  мм. Определить наибольшее расстояние, с которого можно заметить ночью свет карманного фонаря, сила которого  $I = 5 \cdot 10^{-2}$  кд?

**6** На освещённую поверхность Земли каждую секунду падает солнечное излучение с интенсивностью  $E_e = 1,367$  кВт/м<sup>2</sup>. Считая, что Солнце излучает, как абсолютно чёрное тело, определить температуру фотосферы. Диаметр Солнца  $d = 1,392 \cdot 10^9$  м, расстояние от Земли до Солнца  $r_3 = 1,5 \cdot 10^{11}$  м.

**7** Температура плавильной печи повысилась с 600 до 1200°C. Во сколько раз возросла излучаемая энергия?

**8** Какова длина волны излучения, у которого энергия кванта равна средней кинетической энергии атома гелия при температуре  $T = 300$  К?

**9** Солнечная постоянная у поверхности Земли равна  $E_e = 1,367$  кВт/м<sup>2</sup>. Радиус Солнца  $R = 7 \cdot 10^8$  м, расстояние от Земли до Солнца  $r_3 = 1,5 \cdot 10^{11}$  м. Определить световое давление на уровне фотосферы Солнца. Фотосферу принять за абсолютно чёрное тело.

**10** По условию предыдущей задачи рассчитайте радиус сферической частицы, для которой сила светового давления уравновесит силу тяготения со стороны Солнца. Масса Солнца  $M = 2 \cdot 10^{30}$  кг, плотность вещества частицы считать равно  $\rho = 8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, частицу считать абсолютно чёрной.

**11** Чёрный шарик на солнцепёке. Чёрный металлический шарик освещается Солнцем и располагается на пробковой поверхности стола. Оценить температуру шарика, если температура воздуха  $t_0 = 27^\circ\text{C}$ . Плотность потока солнечного излучения, прошедшего через атмосферу, считать равной  $j_c = 1,0$  кВт/м<sup>2</sup>.

**12** Чёрный шарик на солнцепёке и луна. К условию предыдущей задачи добавим, что с помощью лупы лучи концентрируются так, что плотность потока излучения, падающего от Солнца на шарик, возрастает в 10 раз.

**13** Самая яркая звезда на небе – Сириус ( $m_c = -1,45^m$ ). А самая яркая звезда северного полушария – Вега ( $m_v = 0,03^m$ ). Если к ней добавить ещё шесть звёзд с блеском:  $1^m, 2^m, 3^m, 4^m, 5^m, 6^m$ , то возникает вопрос: от чего глаз наблюдателя получит более сильный световой поток: от Сириуса или Веги с этими шестью звёздами?

**14** Средний период обращения кометы Галлея равен 76 лет (за время наблюдения с 240 года до н.э. он менялся 74 до 79 лет). Её перигелийное и афелийное расстояния до Солнца равны:  $r_{\text{п}} = 0,59$  а.е.,  $r_{\text{а}} = 35$  а.е. Во сколько раз изменится плотность потока излучения, падающего на комету от Солнца за 38 лет при движении её от перигелия к афелию?

### Решения, указания и ответы для самоконтроля

**1** За счёт частиц и электромагнитных волн.

$$\mathbf{2} \quad j = \frac{W}{S\tau}, \quad W = N \cdot W_1, \quad W_1 = h\nu = h \cdot \frac{c}{\lambda}; \Rightarrow N = \frac{j \cdot S \tau \lambda}{hc} = 2,5 \cdot 10^{20}.$$

$$\mathbf{3} \quad E_{\kappa} = E_{\kappa, \text{пост}} + E_{\kappa, \text{отраж}} = \frac{5}{2} kT, \quad E_{\Phi} = h \cdot \frac{c}{\lambda}, \Rightarrow T = \frac{2hc}{5k\lambda} = 9780 \text{ К.}$$

$$\mathbf{4} \quad P\tau = N \cdot W_1, \quad W_1 = h \cdot \frac{c}{\lambda}, \quad P \cdot \tau = c_{\text{в}} \cdot m \cdot \Delta t, \Rightarrow t = \frac{N \cdot h \cdot c \cdot \tau}{\lambda \cdot c_{\text{в}} \cdot m \cdot \Delta t} = 1 \text{ с.}$$

$$\mathbf{5} \quad I = \frac{\Phi}{\Omega}, \quad \Omega = \frac{S}{r^2}, \quad S = \frac{\pi \cdot d^2}{4}; \Rightarrow r = \frac{d}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot I}{\Phi}} = 5 \text{ км.}$$

$$\mathbf{6} \quad j = \frac{\Phi_{\epsilon}}{\pi d^2}, \quad E_{\epsilon} = \frac{\Phi_{\epsilon}}{4\pi r_3^2}, \quad j = \sigma T^4; \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{4E_{\epsilon} r_3^2}{\sigma d^2}} = 5780 \text{ К.}$$

$$\mathbf{7} \quad j_1 = \sigma T_1^4; \quad j_2 = \sigma T_2^4 \Rightarrow \frac{j_2}{j_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = \left(\frac{1473 \text{ К}}{873 \text{ К}}\right)^4 = 8,1.$$

$$\mathbf{8} \quad E_{\gamma} = E_{\kappa}, \quad E_{\kappa} = \frac{3}{2} kT, \quad E_{\gamma} = h \cdot \frac{c}{\lambda}; \Rightarrow \lambda = \frac{2hc}{3kT} = 32 \text{ мкм.}$$

$$\mathbf{9} \quad j = \frac{\Phi_{\epsilon}}{4\pi R^2}, \quad E_{\epsilon} = \frac{\Phi_{\epsilon}}{4\pi r_3^2}, \quad p = \frac{j}{c}; \Rightarrow p = \frac{E_{\epsilon} r_3^2}{c \cdot R^2} = 0,2 \text{ Па.}$$

$$\mathbf{10} \quad F_1 = F_p, \quad F_r = \frac{Gm_{\text{ч}}M}{r_{\text{ч}}^2}, \quad m_{\text{ч}} = \rho \cdot V_{\text{ч}}, \quad V_{\text{ч}} = \frac{4}{3} \pi R_{\text{ч}}^3, \quad F_p = p \cdot S_{\text{ч}}, \quad S_{\text{ч}} = \pi \cdot R_{\text{ч}}^2. \text{ Из}$$

предыдущей задачи:  $p = \frac{E_{\epsilon} r_3^2}{c r_{\text{ч}}^2}$ , где  $r_{\text{ч}}$  – расстояние от центра Солнца до частицы;

$$\Rightarrow R_{\text{ч}} = \frac{3E_{\epsilon} r_3^2}{4cG\rho M} = 70 \text{ нм. Не зависит от расстояния до Солнца.}$$

**11** Если шарик находится в тени, то его температура равна  $T_0 = 300 \text{ К}$ . Он излучает со всей поверхности сферы ( $4\pi R^2$ ) поток энергии как абсолютное чёрное тело  $P_0 = \sigma T_0^4 \cdot 4\pi R^2$ . Такой же поток энергии шарик получает со стороны окружающих предметов. Теплопроводностью и конвекцией пренебрежём.

Если шарик облучается прямыми солнечными лучами (по видимой площади  $\pi R^2$ ), то нагревается до тех пор, пока суммарный падающий на него поток тепла не уравнивается потоком, излучаемым шариком:

$$P_{\text{с}} + P_0 = P_{\text{изл}} \quad \text{или} \quad j_{\text{с}} \cdot \pi R^2 + \sigma T_0^4 \cdot 4\pi R^2 = \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2;$$

$$\Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{j_{\text{с}}}{4\sigma} + T_0^4} = \sqrt[4]{\frac{10^3}{4 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}} + 300^4} = 334 \text{ К}; \quad t = 334 - 273 = 61^{\circ}\text{С.}$$

Итак, чёрный шарик на солнцезёнке нагревается до температуры не более  $61^{\circ}\text{С}$ .

**12** Решение аналогично предыдущей задаче.

$$T = \sqrt[4]{\frac{10 \cdot j_{\text{с}}}{4\sigma} + T_0^4} = \sqrt[4]{\frac{10 \cdot 10^3}{4 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}} + 300^4} = 479 \text{ К}; \quad t_2 = 479 - 273 = 206^{\circ}\text{С.}$$

Поскольку мы не учли отток тепла за счёт теплопроводности и конвекции, то температура шарика будет несколько меньше  $206^{\circ}\text{С}$ .

**Лирическое отступление.** Помогая отцу ремонтировать зерноуборочный комбайн летом в 70-х годах XX века в Кизлярском районе Дагестана, я обратил внимание на то, что детали комбайна, особенно жестяные кожухи, так нагревались на солнцезёнке, что их невозможно было брать голыми руками. Поэтому задача

про шарик на Солнце нас очень заинтересовала. Мы решали её через теплопроводность, но чувствовали что это неверно, ведь теплопроводность воздуха очень мала. Известных решений этой задачи не встречали и вот в работе над этой книгой (через 40 лет!), видимо, удалось найти верный подход к решению задач такого типа. Будем рады если общество примет его.

**13** Найдём отношение освещённости, создаваемой Вегой и шестью звёздами, к освещённости, создаваемой Сириусом:

$$\frac{E_{\text{В+}}}{E_{\text{С}}} = \frac{E_{\text{В}}}{E_{\text{С}}} + \frac{E_1}{E_{\text{С}}} + \frac{E_2}{E_{\text{С}}} + \frac{E_3}{E_{\text{С}}} + \frac{E_4}{E_{\text{С}}} + \frac{E_5}{E_{\text{С}}} + \frac{E_6}{E_{\text{С}}}.$$

Применим формулу Погсона  $\frac{E_1}{E_2} = 10^{0,4(m_2 - m_1)}$ :

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{В+}}}{E_{\text{С}}} &= 10^{0,4(-1,45-0,03)} + 10^{0,4(-1,45-1)} + 10^{0,4(-3,45)} + 10^{0,4(-4,45)} + 10^{0,4(-5,45)} + \\ &+ 10^{0,4(-6,45)} + 10^{0,4(-7,45)} = 0,256 + 0,105 + 0,042 + 0,017 + 0,007 + 0,003 + 0,001 \approx 0,43. \end{aligned}$$

Каждый член показывает, какая доля от освещённости, создаваемой Сириусом, приходится на соответствующую звезду. Например, освещённость создаваемая Вегой составляет 0,256 от освещённости Сириуса. А звезда шестой звёздной величины светит в 1000 раз слабее, чем Сириус.

Итак, Сириус светит в глаз земного наблюдателя примерно в 2,3 раза больше, чем Вега с компанией шести звёзд:

$$\frac{E_{\text{С}}}{E_{\text{В+}}} = 2,32 \approx 2,3.$$

**14** Будем считать, что поток, излучаемый Солнцем, остаётся неизменным за это время. Согласно закону освещённости:  $j_s = \frac{I_s}{r^2}$ , где  $I_s$  — энергетическая сила света Солнца;  $j_s$  — полная плотность потока излучения, падающего на комету. Запишем этот закон для перигелия и афелия:

$$j_{\text{п}} = \frac{I_s}{r_{\text{п}}^2}, \quad j_{\text{а}} = \frac{I_s}{r_{\text{а}}^2}; \quad \Rightarrow \quad \frac{j_{\text{п}}}{j_{\text{а}}} = \frac{r_{\text{а}}^2}{r_{\text{п}}^2} \approx 3,5 \cdot 10^3$$

Итак, плотность потока солнечного излучения, падающего на комету Галлея в перигелии, в 3,5 тысячи раз больше, чем в афелии. А для Земли разница составляет всего 7%.

# Глава 6. Экспериментальные задания

*Никаким количеством экспериментов  
нельзя доказать теорию, но достаточно одно-  
го эксперимента, чтобы её опровергнуть.*

Альберт Эйнштейн

## Условия экспериментальных задач

- 1** Определить показатель преломления жидкости.

**Оборудование:** вогнутое зеркало, линейка измерительная, стакан с водой.

- 2** Определить показатель преломления прямоугольной прозрачной призмы.

**Оборудование:** прозрачная прямоугольная призма, линейка измерительная, лист бумаги, булавки (4 шт.).

- 3** Определить показатель преломления прямоугольной прозрачной призмы.

**Оборудование:** прозрачная прямоугольная призма, линейка измерительная, лист бумаги, карандаш.

- 4** Определить фокусное расстояние собирающей линзы.

**Оборудование:** собирающая линза на подставке, лампочка на подставке, источник тока, экран, соединительные провода, линейка измерительная.

- 5** Определить фокусное расстояние рассеивающей линзы.

**Оборудование:** линзы рассеивающая и собирающая на подставках; лампочка на подставке с источником тока, экран, линейка измерительная.

- 6** Определить фокусное расстояние рассеивающей линзы.

**Оборудование:** рассеивающая линза на подставке, лампочка на подставке, источник тока, соединительные провода, экран с миллиметровой сеткой, линейка измерительная.

- 7** Определить показатель преломления неизвестной жидкости.

**Оборудование:** химический стакан с исследуемой жидкостью, тёмная бумага, осветитель (лампочка с батареей), измерительная линейка.

- 8** Измерить длину волны света, излучаемого лазерной указкой.

**Оборудование:** дифракционная решетка, в которой на 1 мм нанесено 100 штрихов; лазерная указка с неизвестной длиной волны излучения; линейка с миллиметровыми делениями.

- 9 (1995-III-11).** Определить оптическую силу системы, состоящей из собирающей линзы и зеркала. Зеркало и линза касаются друг друга.

**Оборудование:** собирающая линза, плоское зеркало, ученическая линейка.

- 10 (1993-IV-10).** Из двух линз собрать трубу с максимальным увеличением. Определить увеличение зрительной трубы. Поместить оставшуюся линзу вблизи фокальной плоскости объектива. Описать, каким образом изменились оптические свойств трубы и объяснить, почему это произошло.

**Оборудование:** две собирающие линзы №1 и одна собирающая линза №2, измерительная линейка.

**11 (1993-IV-11).** Определить среднее расстояние между витками нити накала лампочки, не повреждая её.

**Оборудование:** лампочка, источник питания, соединительные провода, фольга, игла, матовое стекло, линейка, штатив с лапкой.

**Примечание.** Эксперимент желательно делать в аудитории, где возможно хотя бы частичное затемнение аудитории, тогда в качестве лампы можно применить лампочку от карманного фонаря. Иначе следует использовать более мощную лампу, чтобы яркость лампы была достаточна для получения изображения.

**12 (1996-IV-11).** Определить показатель преломления жидкости.

**Оборудование:** лампочка от карманного фонарика с источником питания и соединительными проводами, стеклянная банка цилиндрической формы, собирающая линза, белый экран, ученическая линейка, сосуд с водой.

**13 (1997-IV-9).** Определить отношение диаметров головки и её длинной части.

**Оборудование:** булавка с круглой шляпкой, кусок фольги, бумага белая формата А4.

**13 (IV-9).** Параболическим называется зеркало, которое в любом сечении, проходящем через ось симметрии, имеет формулу параболы. Известно, что если на такое зеркало падают лучи света параллельно оси симметрии, то после отражения все они пересекаются в одной точке, называемой фокусом. На выданном листе начерчен фрагмент параболы и проведены линии параллельные оси параболы (рис. 1). С помощью имеющегося оборудования найти положение точки фокуса на листе с изображением части параболы.

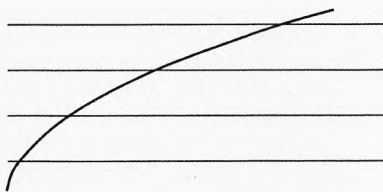


Рис. 1. Параболическое зеркало

**Оборудование:** лист бумаги формата А4 с изображением части параболы, четыре булавки с круглыми головками, зеркало, линейка без делений.

**13 (1998-V-10).** Определить расстояние  $H$  между двумя тонкими стёклами, закреплёнными в открытом с одной стороны ящике.

**Оборудование:** ящик с двумя параллельными стёклами, линейка измерительная, карандаш, лист бумаги.

**13 (V-10).** Определить показатель преломления неизвестной жидкости.

**Оборудование:** тонкостенный химический стакан (цилиндрической формы), исследуемая жидкость, миллиметровая бумага, источник света (карманный фонарик), ножницы, скотч.

**13 (2000-V-11).** Определить длину волны излучения полупроводникового лазера и период отражательной дифракционной решетки.

**Оборудование:** лазерная указка, два бруска, линейка, экран, алюминиевая фольга, две швейные иглы, стеклянная пластинка, пластилин, часть сектора лазерного диска (дифракционная решетка), ластик, лист миллиметровой бумаги.

**13 (V-11).** Определить размеры участка поверхности компакт-диска, приходящиеся на 1 бит информации.

**Оборудование:** матрица CD-R ёмкостью 700 МБ, полупроводниковый лазер (лазерная указка с длиной волны  $\lambda = 650$  нм), штатив, экран, линейка карандаш.

**19** (V-11). Определить показатель преломления неизвестной жидкости.

**Оборудование.** Цилиндрический прозрачный сосуд с небольшим отверстием в боковой стенке (сверху сосуд открыт, а стенки сосуда заклеены тёмной бумагой, кроме вертикальной щели, расположенной напротив отверстия), исследуемая жидкость, полупроводниковый лазер (лазерная указка), штатив, линейка, миллиметровая бумага, липкая лента, карандаш, прищепка.

**20** (V-11). Определить показатель преломления неизвестной жидкости.

**Оборудование.** Чашка Петри (невысокий цилиндрический прозрачный сосуд), плоскопараллельная стеклянная призма, скотч, линейка, лист бумаги, неизвестная жидкость.

## Возможные решения предложенных задач

**1** Кладём вогнутое зеркало на стол. Перпендикулярно его главной оптической оси располагаем предмет (острие карандаша) и передвигаем предмет вдоль этой оси до совмещения с его действительным изображением (наблюдение ведём вдоль главной оптической оси вогнутого зеркала). Такое совмещение возможно, когда предмет находится в оптическом центре вогнутого зеркала. Измерив расстояние от этой точки до полюса зеркала (равное в данном случае радиусу кривизны  $R_1 = 2F_1$ ), находим фокусное расстояние  $F_1$  этого зеркала.

Затем наливаем в вогнутое зеркало немного воды и определяем аналогичным образом фокусное расстояние  $F_0$  получившейся оптической системы (водяная линза – зеркало). При этом предмет и его изображение снова будут на двойном фокусном расстоянии системы  $2F_0$ .

Если  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_0$  – соответственно оптические силы вогнутого зеркала, водяной линзы и системы (водяная линза – вогнутое зеркало), то

$$D_0 = D_1 + 2D_2. \quad (1)$$

Здесь коэффициент 2 вводится перед оптической силой водяной линзы, поскольку лучи дважды проходят через водяную линзу.

Учитывая, что радиус кривизны одной поверхности водяной линзы  $R_1 = 2F_1$ , а другой –  $R_2 = \infty$ , можно записать

$$D_2 = (n-1) \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = (n-1) \cdot \left( \frac{1}{2F_1} + \frac{1}{\infty} \right) = (n-1) \cdot \frac{D_1}{2}, \quad (2)$$

где  $n$  – показатель преломления воды.

Из (1) и (2) следует  $n = \frac{D_0}{D_1}$ , или  $n = \frac{F_1}{F_0}$ .

Таким образом, чтобы определить показатель преломления жидкости, достаточно найти отношение фокусных расстояний вогнутого зеркала без жидкости и с жидкостью.

Выведем эту же формулу, используя закон преломления.

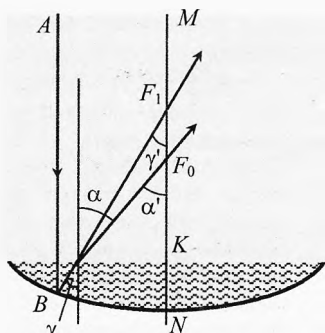


Рис. 2. Вогнутое зеркало с водой и без воды

При отсутствии воды в вогнутом зеркале луч  $AB$ , параллельный главной оптической оси  $MN$ , после отражения проходит через фокус  $F_1$  зеркала (рис. 2).

Если в вогнутом зеркале находится вода, то луч  $AB$ , преломляясь, пройдёт через фокус  $F_0$  оптической системы (вогнутое зеркало – водяная линза). Если теперь воспользоваться свойством обратимости лучей, то углы  $\alpha$  и  $\gamma$  окажутся соответственно углами падения и преломления, причём  $\alpha = \alpha'$  и  $\gamma = \gamma'$ . Тогда, учитывая, что слой воды в вогнутом зеркале тонкий и размером  $KN$ , по сравнению с  $F_1$  и  $F_0$ , можно пренебречь, а, также, считая углы  $\alpha$  и  $\gamma$  достаточно малыми, получаем

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \approx \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \gamma'} = \frac{F_1}{F_0}.$$

**2** Накладываем на лист бумаги призму и обводим её контур. Вкалываем в бумагу две иглы  $A$  и  $B$  с одной стороны призмы. Глядя сквозь призму, вкалываем ещё две иглы  $C$  и  $D$  перед призмой так, чтобы все четыре иглы сливались в одну (рис. 3). С помощью линейки измеряем отрезок  $BC$  и отмечаем на отрезке  $AB$  такую точку  $N$ , что  $BN = BC$ . Тогда показатель преломления стекла:

$$n \cdot \sin \alpha = \sin \beta, \quad \sin \alpha = \frac{CE}{BC}, \quad \sin \beta = \frac{MN}{BN}; \quad \Rightarrow \quad n = \frac{MN}{CE}.$$

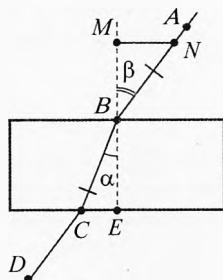


Рис. 3. Показатель преломления призмы

**Примечание.** Исключение равных отрезков  $BN$  и  $BC$  позволяет уменьшить погрешность измерений. Так как при использовании линейки плохого качества (например, деревянной или пластиковой) пришлось бы измерить 4 отрезка, а не 2, и погрешность увеличилась бы вдвое. А чтобы отмерить отрезок  $BN$ , равный  $BC$ , точность делений линейки не требуется. Это можно сделать даже с помощью линейки без делений.

**3** Накладываем на лист бумаги прямоугольную прозрачную призму стороной  $ABCD$ , и обводим её контур  $A'B'C'D'$ . Переворачиваем призму через ребро  $BC$  и обводим контур  $BB_1C_1C$  (рис. 4). Проводим на листе бумаги линию  $NM$ , параллельную стороне  $BB_1$ . Смотрим через пластинку на линию  $NM$  так, чтобы её изображение совпало с ребром  $AA_1$ . Отмечаем на листе бумаги линию  $MN$  (в  $M_1N_1$ ).

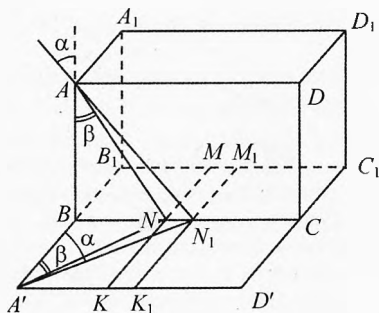


Рис. 4. Показатель преломления призмы

Проведём линии  $A'N$  и  $A'N_1$ . Тогда  $\sin \alpha = \frac{BN_1}{A'N_1}$ ,  $\sin \beta = \frac{BN}{A'N}$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  – углы

падения и преломления луча. Показатель преломления стекла определяется из соотношения:

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{BN_1 \cdot A'N}{A'N_1 \cdot BN}.$$



**4 I способ.** С помощью линзы получить на экране чёткое изображение удалённого объекта (например, дом за окном). Расстояние от линзы до экрана будет равно фокусному расстоянию (рис. 5).

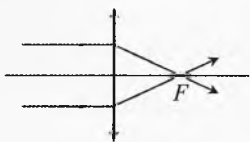


Рис. 5. Фокус собирающей линзы

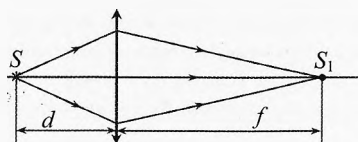


Рис. 6. Изображение в собирающей линзе

**II способ.** С помощью линзы получить на экране чёткое изображение лампочки (рис. 6). Рассчитать фокусное расстояние по формуле:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \Rightarrow F = \frac{d \cdot f}{d + F}.$$

**5** Рассеивающая линза не даёт действительного изображения на экране. Поэтому для определения фокусного расстояния рассеивающей линзы используют вспомогательную собирающую линзу с большей оптической силой,

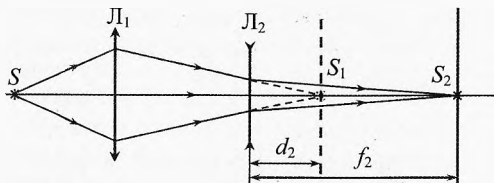


Рис. 7. Определение фокуса рассеивающей линзы

чем у рассеивающей линзы по модулю. С помощью собирающей линзы получают на экране действительное увеличенное изображение предмета. Затем, между экраном и линзой ставят рассеивающую линзу (рис. 7), при этом отчётливое изображение предмета пропадает. Отодвигая экран и сдвигая рассеивающую линзу, вновь добиваются отчётливого изображения предмета. Тогда фокусное расстояние

рассеивающей линзы ( $F_2 < 0$ ):  $-\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = -\frac{1}{|F_2|} \Rightarrow |F_2| = \frac{f_2 d_2}{f_2 - d_2}$ , где  $d_2$  и  $f_2$  –

расстояния от рассеивающей линзы до первого и второго положения экрана соответственно.

**6** Рассеивающая линза всегда даёт мнимое изображение предмета. Если на главной оптической оси сё (или очень близко к ней) поместить точечный источник света, то на линзу будет падать расходящийся световой пучок, который она ещё больше рассеивает. В результате мнимое изображение точечного источника света  $S$  (рис. 8), окажется в точке  $S_1$ , а на экране, поставленном за линзой, получится светлое пятно  $R$ . Пусть радиус линзы  $r$ , а радиуса пятна  $R$ . Из подобия треугольников  $\Delta S_1AO$  и  $\Delta S_1BO_1$  получим:

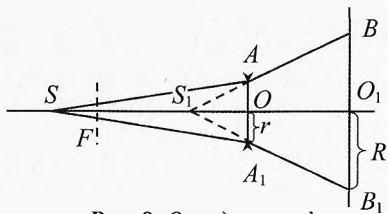


Рис. 8. Определение фокуса рассеивающей линзы

$$\frac{AO}{S_1O} = \frac{BO_1}{S_1O_1}.$$

Обозначив  $S_1O$  через  $f$ , а  $OO_1$  через  $b$ , получим:  $\frac{r}{f} = \frac{R}{f+b}$ .

По формуле линзы  $\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{|F|}$ , где  $d = SO$ ,  $F$  – фокусное расстояние линзы ( $F < 0$ ). Решая совместно два последних уравнения, получим:

$$|F| = \frac{1}{\left(\frac{R}{br} - \frac{1}{b}\right) - \frac{1}{d}}.$$

**7** Тёмную бумагу вставить внутрь стакана, чтобы осталась узкая вертикальная щель  $A$  (рис. 9). Жидкость налить в стакан так, чтобы её уровень был ниже верхнего края бумаги.

Перемещая осветитель  $S$ , добиться того, чтобы совпали изображения щели, образованные лучами, прошедшими через жидкость и по воздуху. Таким образом, найдём точку  $B$ , диаметрально противоположную  $A$ . После этого осветитель сместить в сторону (в точку  $S_1$ ) и найти изображение щели в точке  $C$  от лучей, прошедших через жидкость, и в точке  $D$  от лучей, прошедших по воздуху. Так как треугольники  $ACB$  и  $ADB$  – прямоугольные, то

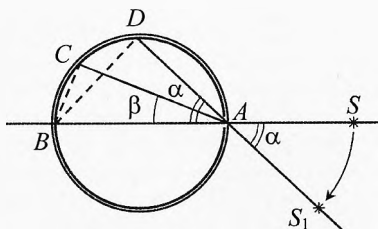


Рис. 9. Показатель преломления жидкости

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{BD}{BC}.$$

**8** Как для решеток в проходящем свете, так и для отражательных решеток условие для главных дифракционных максимумов одно и то же:  $d \cdot \sin \varphi = k\lambda$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$  – порядок спектра,  $\lambda$  – длина волны лазера,  $\varphi$  – угол слева или справа от центрального нулевого максимума, но который приходится дифракционный максимум излучения при определённом значении  $k$  для данной длины волны,  $d$  – период решетки. Пропустим свет от указки через дифракционную решетку:  $\lambda = \frac{d \cdot \sin \varphi}{k}$ . Так как  $\varphi$  достаточно мал, то  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Тогда  $\lambda \approx \frac{d \cdot \varphi}{k}$ .

**9** Перемещаем любой предмет вдоль главной оптической оси, добиваясь совпадения положения предмета с его оптическим изображением. В этом случае предмет будет находиться на расстоянии, равном  $2F$ . Оптическая сила  $D = 1/F$ .

**10** Соберём зрительную трубу, совместив фокусы линз №1 и №2. Увеличение трубы может быть найдено как отношение фокусных расстояний линз:  $\Gamma = \frac{F_{об}}{F_{ок}}$ . Построим ход лучей, падающих на объектив под малым углом  $\varphi_0$  к главной оптической оси системы (рис. 10). Часть лучей, например, луч 1, проходят мимо окуляра.

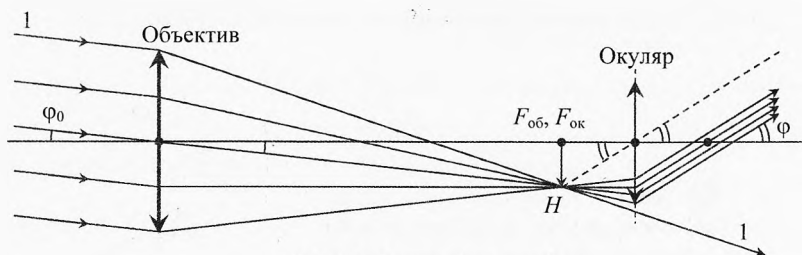


Рис. 10. Зрительная труба

Из рисунка 11 видно, что установка в фокальной плоскости объектива (и окуляра) ещё одной линзы не меняет угловое увеличение, но некоторые лучи, ранее не попадавшие в окуляр, теперь смогут пройти через него. Делаем вывод: линза, установленная в задней фокальной плоскости объектива, увеличивает угловое поле зрения и светосилу системы.

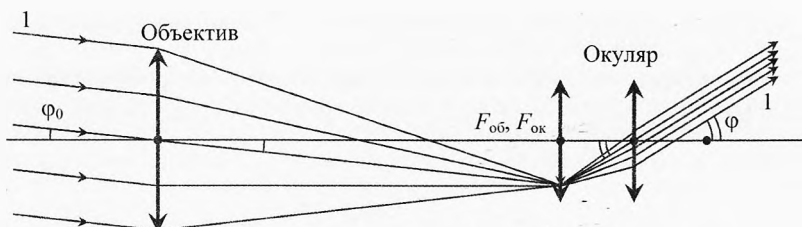


Рис. 11. Зрительная труба с линзой в фокальной плоскости

**11** Соберём камеру-обскуру, используя отверстие, проделанное иглой в фольге (рис. 12). Получим увеличенное изображение нити накала лампы. Проводя на нём необходимые измерения, рассчитываем величину шага спирали с учётом увеличения, которое определяем из геометрии установки.



Рис. 12. Спираль лампочки в камере-обскуре

**12** Установим источник света вплотную к банке, стоящей на столе. Налейм в банку воду. Расположим с противоположной от источника стороны банки собирающую линзу и экран (рис. 13). Получим на экране изображение лампочки в виде тонкой вертикальной полосы (в вертикальной плоскости банка ведёт

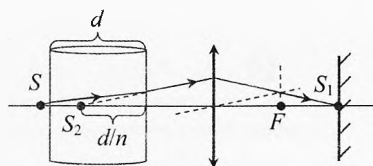


Рис. 13. Показатель преломления жидкости

себя как плоскопараллельная пластинка, а в горизонтальной – как толстая линза). Зарисуем расположение частей установки. Уберем банку и, не меняя положение линзы и экрана, сместим лампочку так, чтобы на экране получилось её четкое изображение. Зарисуем новое положение лампочки, которое совпадает с мнимым изображением в первом опыте  $S_2$ . Измерим толщину  $d$  банки. Оптический путь луча, проходящего через воздух, сокращается с  $d$  до  $d/n$ . Поэтому источник света придётся сдвинуть примерно на расстояние  $SS_2 = d - d/n$ . Значит,  $n = \frac{d}{d - SS_2}$ .

**13** В фольге делаем маленькое отверстие, позволяющее одновременно видеть резкое изображение булавки, находящейся близко к глазу и далекого листа бумаги с предварительно нанесенными равными делениями (рис. 14). Из подобия соответствующих треугольников вычисляем искомое отношение: делим количество делений, заслоняемых головкой булавки, на количество делений, заслоняемых её длинной частью.

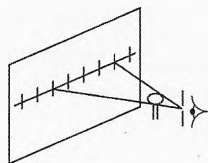


Рис. 14. Отношение диаметров шляпки и иголки

**14** В точке пересечения одной из нарисованных на листе линий с параболой установить зеркало так, чтобы оно совпадало с касательной к параболе в этой точке. Две булавки вставить на выбранную линию, а оставшиеся две – так, чтобы они были на одной прямой линии с изображением первых двух булавок в зеркале. Прямая, проведенная через точки, в которые вколоты две последние булавки, определит ход отраженного луча. Повторив эксперимент для всех нарисованных линий – найдём точку пересечения всех отраженных лучей. Это и будет фокус параболы (рис. 15).

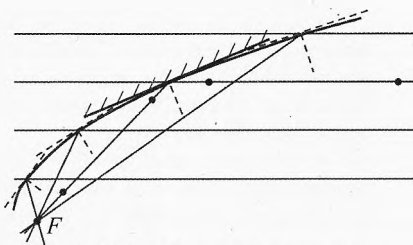


Рис. 15. Параболическое зеркало

**15** Положим ящик на бок, чтобы стёкла оказались в вертикальной плоскости (см. на рис. 16 вид сверху). Начертим на листе бумаги линию  $AB$ , параллельную стёклам. Совместим с задним стеклом изображение  $A'B'$ , получившееся в результате отражения от переднего стекла. Расстояние от линии  $AB$  до переднего стекла будет равно расстоянию между стёклами. Погрешность измерения кроме погрешности измерения расстояния линейкой зависит от толщины стекол  $h$  и составляет  $2h$ .

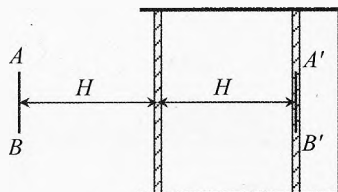


Рис. 16. Расстояние между стёклами

**16** Из миллиметровой бумаги сделаем экран, на котором будем наблюдать изображение спирали лампочки через стакан, используемый в качестве толстой линзы (рис. 17). Добьёмся симметричного положения лампочки и экрана. При

этом ход лучей будет симметричным, а внутри линзы параксиальные лучи пойдут параллельно оси симметрии, значит  $\beta = \delta$ . По закону преломления:  $\alpha \approx n \cdot \beta$ . Угол  $\alpha$  – внешний угол в  $\triangle AOS$ , значит  $\alpha = \gamma + \delta$ . Учитывая, что  $\gamma \approx AB/L$ ,  $\delta \approx AB/R$ , получим:

$n \cdot \delta = \gamma + \delta$ , или  $n = 1 + \frac{R}{L}$ . Учитывая, что диаметр стакана  $D = 2R$ , окончательно получим:  $n = 1 + \frac{D}{2L}$ .

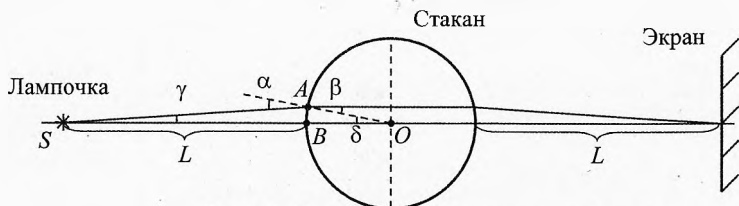


Рис. 17. Показатель преломления жидкости

**17** Прокатив иглу по ластику, вычислим диаметр  $d$  иглы:  $S = N \cdot \pi d \Rightarrow d = S/(N\pi)$ , где  $S$  – длина пути иглы,  $N$  – число оборотов.

Сложив две иглы вплотную друг к другу, проколем в фольге два одинаковых отверстия диаметром в несколько раз меньше диаметра иглы (для этого фольгу надо положить на стекло). Расстояние между центрами отверстий равно диаметру иглы (рис. 18).

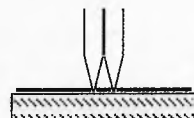


Рис. 18. Проколы два отверстия

С помощью пластилина на одном бруске закрепим горизонтально лазер, а на втором бруске – вертикально кусочек фольги с отверстиями, и осветим отверстия (рис. 19). На экране будем наблюдать интерференционную картину: тёмные и светлые полосы (как в опыте Юнга). Измерив ширину нескольких полос, найдём ширину  $\Delta x$  одной полосы и по ней вычислим длину волны излучения лазера:

$$d \cdot \sin \varphi = \lambda, \quad \sin \varphi \approx \frac{\Delta x}{L} \Rightarrow \lambda \approx \frac{d \cdot \Delta x}{L},$$

где  $L$  – расстояние от фольги до экрана. В этом случае угол  $\varphi$  мал.

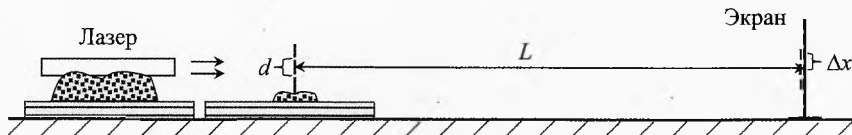


Рис. 19. Наблюдение интерференции

Аналогично определим период  $b$  отражательной решетки, то есть ширину бороздки лазерного диска. Направим луч лазера перпендикулярно поверхности диска. На пути отраженного излучения поместим линейку. Угол  $\varphi$  между центральным и первым максимумами в отраженном свете от лазерного диска достаточно

большой:  $b = \frac{\lambda}{\sin \varphi}$ .

**18** Соберём установку для наблюдения интерференционной картины в отражённом от компакт-диска свете лазера (рис. 20). Измерим на экране высоту  $h$  пятна, соответствующего дифракционному максимуму порядка  $k$ , и расстояние  $L$  от точки падения луча лазера на диск до экрана. Тогда период  $d$  решетки (расстояние между соседними дорожками):

$$d \cdot \sin \varphi = k \lambda, \quad \sin \varphi = \frac{L}{\sqrt{L^2 + h^2}}; \Rightarrow d = \frac{k \lambda \sqrt{L^2 + h^2}}{L}.$$

Измерив внешний  $R$  и внутренний  $r$  радиусы рабочей поверхности диска, определим её площадь  $S = \pi(R^2 - r^2)$ . Число бит информации:  $1 \text{ МБ} = 1024^2 \text{ Б}$ ;  $1 \text{ Б} = 8 \text{ бит}$ ,  $\Rightarrow N = 700 \cdot 1024^2 \cdot 8 = 5,87 \cdot 10^9 \text{ бит}$ . Значит,

длина участка дорожки, приходящаяся на один бит, равна  $x = \frac{S}{N \cdot d}$ .

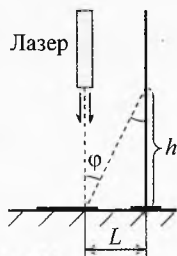


Рис. 20. Интерференция на компакт-диске

**19** Наливаем воду почти до самого отверстия и под некоторым углом пускаем через него луч лазера. Луч разделяется на отражённый и преломлённый (рис. 21). По закону преломления:  $\sin \alpha = n \cdot \sin \beta$ , где  $\sin \alpha = \frac{D}{\sqrt{D^2 + a^2}}$ ,

$\sin \beta = \frac{D}{\sqrt{D^2 + b^2}}$ . Решая совместно, получим:

$b^2 = n^2 a^2 + D^2 (n^2 - 1)$ . Изменяя угол падения луча, снимаем зависимость  $b$  от  $a$ . Тогда по тангенсу угла наклона графика  $b^2(a^2)$  найдём  $n^2$ , а значит и сам показатель преломления  $n$ .

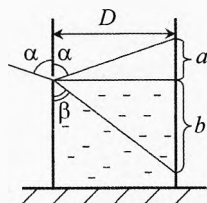


Рис. 21. Показатель преломления жидкости

**20** Обведём чашку Петри по листу бумаги (рис. 22). Наклеим скотч на верхнее и нижнее основания призмы, нанесём на него метки  $A$  и  $B$ . Положим призму в чашку так, чтобы метка  $B$  оказалась в центре окружности. Наклеим скотч на боковую стенку чашки Петри и нанесём на него метку  $C$  там, где видимое продолжение  $AB$  пересекает нарисованную окружность. Налейм в чашку жидкость и отметим точку  $D$ , повторив предыдущую операцию. Согласно закону преломления Снеллиуса:

$$n_{\text{ст}} \cdot \sin \alpha = \sin \beta, \quad n_{\text{ст}} \cdot \sin \alpha = n_{\text{ж}} \cdot \sin \gamma; \Rightarrow$$

$$n_{\text{ж}} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{CE / R}{DF / R} = \frac{CE}{DF}.$$

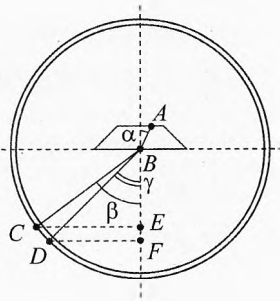


Рис. 22. Показатель преломления жидкости

# Глава 7. Задачи российских физических олимпиад

*Знания делятся на три вида:*

*– знаешь сам;*

*– знаешь, где найти;*

*– знаешь, у кого спросить.*

## Задачи II (муниципального) тура

**1** (2009-II-9). Расстояние между предметом и экраном  $L = 1,5$  м. Двояковыпуклая линза, помещённая между ними, даёт чёткое изображение на экране. Если поменять местами предмет и экран, не изменяя положение линзы, то изображение предмета уменьшится в 3 раза. Чему равно фокусное расстояние линзы?

**Решение.**  $L = d + f$ ,  $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ ,  $\Gamma_1 = \frac{f}{d}$ ,  $\Gamma_2 = \frac{d}{f}$ ,  $\Gamma_1 = 3\Gamma_2$ ;  $\Rightarrow f = \sqrt{3} \cdot d$ ,  
 $d = \frac{L}{1 + \sqrt{3}}$ ,  $f = \frac{L \cdot \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$ ,  $F = \frac{d \cdot f}{d + f} = \frac{L \cdot \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{3})^2} = 34,8$  см.

**2** (2009-II-10). Расстояние между предметом и экраном  $L = 4$  м. Имеется набор тонких линз с фокусными расстояниями 40, 60, 80, 100, 120 и 140 см. Какие из них могут дать действительное изображение предмета на экране? Какая линза дает изображение максимального размера, а какая позволяет получить наименьшее изображение?

**Решение.**  $L = d + f$ ,  $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ ;  $\Rightarrow d^2 - Ld + LF = 0$ . Это квадратное уравнение имеет корни при неотрицательном дискриминанте:  $L^2 - 4LF \geq 0$ ;  $\Rightarrow F \leq L/4$  или  $F \leq 1$  м. Значит, действительное изображение могут дать только линзы с фокусными расстояниями 40, 60, 80 и 100 см. Расстояние от предмета до линзы:  $d = \frac{L \pm \sqrt{L^2 - 4LF}}{2}$ . Увеличение линзы:  $\Gamma = \frac{f}{d} = \frac{L - d}{d} = \frac{L}{d} - 1$ . Минимальное увеличение  $\Gamma = 0,127$  будет при максимальном  $d$ , то есть для линзы с фокусным расстоянием  $F_{\min} = 40$  см, при этом  $d = \frac{L + \sqrt{L^2 - 4LF_{\min}}}{2} = 355$  см. Максимальное увеличение  $\Gamma = 7,87$  будет при минимальном  $d$ , то есть тоже для линзы с  $F_{\min} = 40$  см, при этом  $d = \frac{L - \sqrt{L^2 - 4LF_{\min}}}{2} = 45$  см.

**3** (2008-II-11). Расстояние между предметом и экраном  $L_0 = 2$  м. Двояковыпуклая линза, помещённая между экраном и предметом на расстоянии  $d_0 = 40$  см

от предмета, даёт чёткое изображение на экране. Как нужно перемещать экран, чтобы при удалении линзы от предмета на экране было постоянно чёткое изображение предмета?

**Решение.**  $L_0 = d_0 + f_0$ ,  $\frac{1}{d_0} + \frac{1}{f_0} = \frac{1}{F}$ ,  $\Rightarrow F = \frac{d_0 \cdot (L_0 - d_0)}{L_0} = 32$  см.

$$L = d + f, \quad \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \quad \Rightarrow f = \frac{F \cdot d}{d - F}, \quad L = d + \frac{F \cdot d}{d - F} = \frac{d^2}{d - F}.$$

Видно, что при отодвигании линзы от предмета (то есть при увеличении  $d$ ) расстояние от предмета до экрана необходимо сначала уменьшать, а затем увеличивать. Найдём минимальное расстояние:

$$L' = \left( \frac{d^2}{d - F} \right)' = \frac{2d(d - F) - d^2}{(d - F)^2} = 0, \quad \Rightarrow d = 2F; \quad L_{\min} = 4F = 128 \text{ см.}$$

**4 (2009-II-11).** Светящаяся точка движется с постоянной скоростью параллельно главной оптической оси тонкой собирающей линзы из бесконечности к фокальной плоскости линзы (рис. 1). Как будет двигаться её изображение? Выразить движение изображения точки в виде примерного графика «скорость – расстояние от линзы».

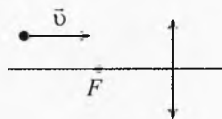


Рис. 1. Движение вдоль оптической оси

**Решение.** Построением найдём положения изображений светящейся точки через равные промежутки времени. Убеждаемся, что изображение движется прямолинейно и ускоренно вдоль линии, проходящей через точку пересечения траектории светящейся точки с линзой и через фокус линзы (рис. 2).

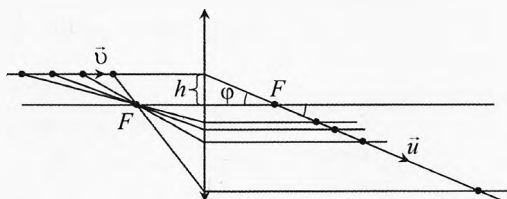


Рис. 2. Движение вдоль оптической оси

(рис. 2). Траектория движения точки-изображения составляет с осью угол  $\varphi$ :  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{F}$ , где  $h$  – расстояние между траекторией светящейся точки и главной оптической осью,  $F$  – фокус линзы. Когда светящаяся точка находится на бесконечности, её изображение находится в фокусе, а скорость изображения равна нулю, при приближении светящейся точки к фокальной плоскости, скорость изображения неограниченно возрастает, а само изображение удаляется в бесконечность.

Из формулы тонкой линзы получим:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{F \cdot d}{d - F}, \quad d = \frac{F \cdot f}{f - F}.$$

Учитывая, что скорость светящейся точки  $v = -d'$ , найдём горизонтальную скорость изображения:

$$f' = \left( \frac{F \cdot d}{d - F} \right)' = \frac{F \cdot (-v)(d - F) - F \cdot d \cdot (-v)}{(d - F)^2} = \frac{v F^2}{(d - F)^2} = \frac{v F^2}{\left( \frac{F \cdot f}{f - F} - F \right)^2}.$$



$$\Rightarrow u_x = f' = \frac{v(f-F)^2}{F^2}$$

Зависимость (рис. 3) полной скорости  $u$  изображения от расстояния до линзы  $f$  является квадратичной, а график функции – параболой:

$$u = \frac{u_x}{\cos \varphi} = \frac{v(f-F)^2}{F^2 \cdot \cos \varphi} = \frac{v(f-F)^2}{F^2} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \quad \text{или}$$

$$u = \frac{v(f-F)^2}{F^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{h}{F}\right)^2}.$$

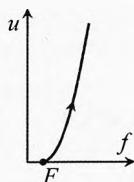


Рис. 3. Скорость изображения

**5 (2010-II-11).** Тело движется со скоростью  $v = 2$  см/с вдоль главной оптической оси двояковыпуклой линзы в направлении линзы (рис. 4). В тот момент, когда тело находилось от линзы на расстоянии, равном её удвоенному фокусному расстоянию, оно разделилось на два осколка. Один осколок, масса которого в два раза больше второго, стал приближаться к линзе со скоростью  $v_1 = 1$  см/с под углом  $\alpha_1 = 60^\circ$  к главной оптической оси. На каком расстоянии друг от друга окажутся изображения осколков в линзе через  $t = 0,5$  с? Фокусное расстояние линзы равно  $F = 6$  см.

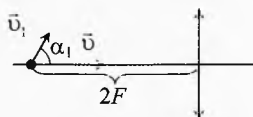


Рис. 4. Движение тела

**Решение.** По закону сохранения импульса по осям  $X$  и  $Y$  (рис. 5):

$$mv = \frac{2m}{3} \cdot v_1 \cdot \cos \alpha_1 + \frac{m}{3} \cdot v_2 \cdot \cos \alpha_2; \quad 0 = \frac{2m}{3} \cdot v_1 \cdot \sin \alpha_1 - \frac{m}{3} \cdot v_2 \cdot \sin \alpha_2.$$

Решая, получим:  $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{2v_1 \cdot \sin \alpha_1}{3v - 2v_1 \cdot \cos \alpha_1} = \frac{\sqrt{3}}{5}, \quad \sin \alpha_2 = \sqrt{\frac{3}{28}}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{5}{\sqrt{28}};$

$$v_2 = 2v_1 \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \sqrt{28} \cdot v_1.$$

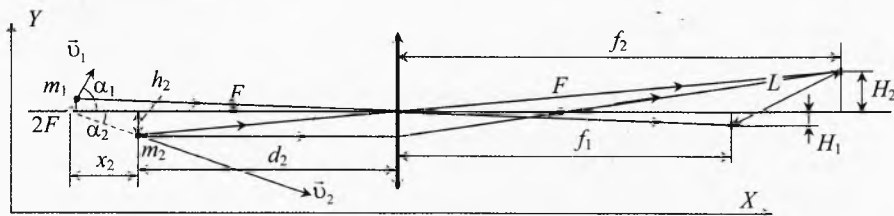


Рис. 5. Движение осколков

Перемещение осколков за время  $t$ :

$$x_1 = v_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot t = \frac{v_1 \cdot t}{2} = 0,25 \text{ см}, \quad h_1 = v_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot t = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot v_1 \cdot t \approx 0,433 \text{ см},$$

$$x_2 = v_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot t = 5v_1 \cdot t = 2,5 \text{ см}, \quad h_2 = v_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot t = \sqrt{3} \cdot v_1 \cdot t \approx 0,866 \text{ см}.$$

Расстояние до линзы:  $d_1 = 2F - x_1 = 11,75$  см,  $d_2 = 2F - x_2 = 9,5$  см.

Из формулы линзы  $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F}$  и формулы увеличения  $\Gamma = \frac{H_1}{h_1} = \frac{f_1}{d_1}$  найдём:

$$f_1 = \frac{d_1 \cdot F}{d_1 - F} = 12,261 \text{ см}, H_1 = h_1 \cdot \frac{f_1}{d_1} = \frac{h_1 \cdot F}{d_1 - F} = 0,452 \text{ см}.$$

$$\text{Аналогично, } f_2 = \frac{d_2 \cdot F}{d_2 - F} = 16,286 \text{ см}, H_2 = \frac{h_2 \cdot F}{d_2 - F} = 1,485 \text{ см}.$$

Тогда расстояние между изображениями осколков по теореме Пифагора:

$$L = \sqrt{(f_2 - f_1)^2 + (H_2 + H_1)^2} \approx 4,5 \text{ см}.$$

## Задачи III (областного) тура

**6 (2000-III-9).** Скоростной катер, удаляющийся от берега со скоростью  $\vec{v}$ , проводит исследование морского дна методом ультразвуковой локации, посылая короткие ультразвуковые сигналы в направлении, составляющем угол  $\alpha$  с поверхностью моря (рис. 6). При достижении дна ультразвуковой сигнал отражается от него под тем же углом, что и падает. Пренебрегая рассеянием, определить угол наклона  $\beta$ , если отражённый сигнал достигает катера при угле  $\alpha_0$ . Скоростью звука  $c$  в воде считать известной.

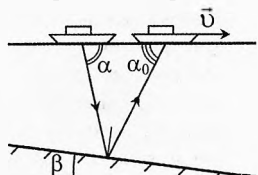


Рис. 6. Ультразвуковая локация

**Решение.** Перейдем в систему отсчёта, связанную с катером  $\vec{v}$ . В этой СО вода движется назад со скоростью  $-\vec{v}$ , снося с собою звуковую волну. При этом вектор скорости посланного сигнала  $\vec{u} = \vec{c} - \vec{v}$ . Он должен быть перпендикулярен дну, иначе эхосигнал не сможет достичь неподвижного в этой СО катера. Из рис. 7 видно, что

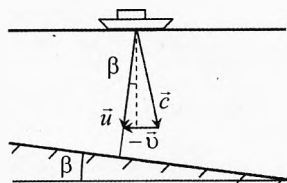


Рис. 7. Система отсчёта, связанная с катером

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|u_x|}{u_y}, \text{ где } u_x = v - c \cdot \cos \alpha, u_y = c \cdot \sin \alpha.$$

$$\text{Следовательно, } \operatorname{tg} \beta = \frac{|v - c \cdot \cos \alpha|}{c \cdot \sin \alpha}.$$

**7 (2003-III-9).** Источник в зазеркалье. Оптическая система состоит из точечного источника  $S$ , идеальной собирающей линзы с фокусным расстоянием  $F$  и плоского зеркала конечных размеров (рис. 8). Источник находится на двойном фокусном расстоянии от центра  $O$  линзы и лежит на её главной оптической оси. Зеркало параллельно этой оси, касается линзы, а его края находятся на расстояниях  $a = 3F/2$  и  $b = 5F$  от плоскости линзы. Найдите все изображения источника в системе. Для каждого изображения укажите области в плоскости рисунка, из которых можно увидеть это изображение.

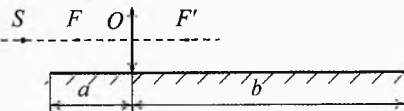


Рис. 8. Источник в зазеркалье

**Решение.** Источник имеет два первичных изображения:  $S_1$  – в зеркале и  $S_2$  – в линзе.  $S_2$  симметрично  $S$  относительно плоскости линзы, т.к. источник находится на двойном фокусном расстоянии (рис. 9).  $S_3$  есть изображение источника  $S_1$  в линзе, а  $S_4$  – изображение источника  $S_2$  в зеркале. Других изображений нет. Области, из которых можно увидеть изображения, определяются пучками лучей, образующих эти изображения. Изображение  $S_1$  можно увидеть из области 1, где точку  $S_1$  видно сквозь зеркало, но где не мешает линза (рис. 10). Изображение  $S_3$  видно из области 3, ограниченной лучами, преломившимися на краях линзы, в этой области лучи должны сначала отразиться от зеркала, а затем преломиться в линзе. Изображение  $S_2$  видно из области 2, которая ограничена лучами от краев линзы и краем зеркала. Область видимости  $S_4$  задаётся лучами, которые попали в зеркало от источника  $S_2$  после преломления в линзе.

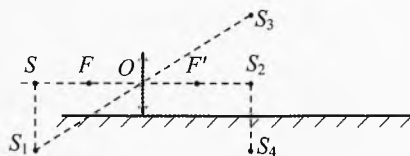


Рис. 9. Четыре изображения

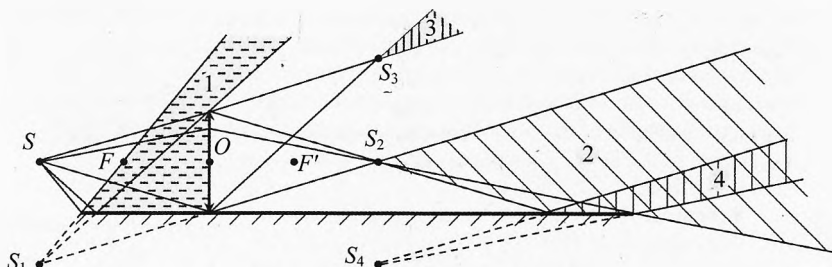


Рис. 10. Области видимости изображений

**8 (2006-III-9). Солнечная постоянная.** Солнечная постоянная  $P = 1,37 \text{ кВт/м}^2$  – это полное количество лучистой энергии Солнца, падающей за 1 с на площадку площадью  $1 \text{ м}^2$ , расположенную перпендикулярно солнечным лучам и удалённую от Солнца на расстояние, равное радиусу Земной орбиты. Какое количество  $P_0$  лучистой энергии излучается в космос с  $1 \text{ м}^2$  поверхности Солнца за 1 с? При наблюдении с Земли угловой диаметр Солнца  $\alpha \approx 0,5^\circ$ .

**Решение.** Пусть  $R$  – радиус Солнца,  $r_3$  – расстояние от Солнца до Земли. Так как  $\alpha \ll 1$ , то угловой диаметр Солнца в радианах:  $\alpha \approx \frac{2R}{r_3}$ .

Отношение площади  $S_3$  сферы радиусом  $r_3$  к площади  $S$  поверхности Солнца:  $\frac{S_3}{S} = \frac{r_3^2}{R^2}$ . Вся излучаемая Солнцем энергия полностью проходит через любую охватывающую его сферу, поэтому:  $S \cdot P_0 = S_3 \cdot P$ .

Значит,  $P_0 = \frac{S_3 \cdot P}{S} = P \cdot \frac{r_3^2}{R^2} = \frac{4P}{\alpha^2} = 72 \text{ МВт/м}^2$ , где  $\alpha \approx 0,5^\circ \approx 0,00873 \text{ рад}$ .

**9 (2010-III-9).** Два зеркала. Перед системой зеркал  $M_1$  и  $M_2$  расположена буква Б так, как показано на рис. 11. Постройте на том же рисунке все изображения, даваемые этой системой. Докажите, что других изображений быть не может. Длина каждого из зеркал равна расстоянию между ними.

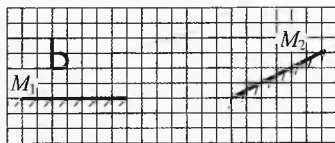


Рис. 11. Система зеркал

**Решение.** Два изображения  $S_1$  и  $S_2$  — строятся в зеркалах  $M_1$  и  $M_2$  простым отражением относительно плоскости зеркала (рис. 12). Покажем, что других изображений не будет.

Действительно, изображение  $S_2$  находится за отражающей поверхностью обоих зеркал, значит, оно не может ещё раз отразиться и дать новое изображение.

Найдём область пространства, из которой видно изображение  $S_1$ . Для этого проведём из верхней точки изображения  $S_1$  лучи, проходящие через края зеркала  $M_1$ . Из построения видно, что зеркало  $M_2$  не попадает в угол «видимости» изображения  $S_1$ , значит лучи, отражённые от первого зеркала уже не смогут отразиться от второго зеркала и других изображений не будет.

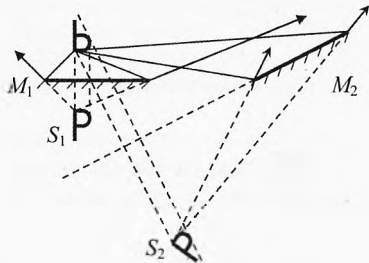


Рис. 12. Изображения в системе зеркал

**10 (1999-III-11).** Стекланный тонкостенный аквариум-шар наполнен водой ( $n = 4/3$ ). Наблюдатель смотрит вдоль диаметра на рыбку, плывущую вдоль этого диаметра со скоростью  $v_0 = 0,6$  см/с. Где находится рыбка в тот момент, когда её изображение совпадает с самой рыбкой? Найти скорость  $v_1$  изображения рыбки в этот момент.

**Решение.** Пусть рыбка находится на расстоянии  $x_0$  дальше центра аквариума, а изображение — на расстоянии  $x$  (рис. 13). По закону преломления для произвольного луча при малых углах:  $\gamma = n \cdot (\alpha - \beta)$ .

Из рисунка видно, что  $\alpha = \frac{h}{R}$ ,

$$\beta = \frac{h}{R + x_0}, \quad \delta = \frac{h}{R + x}, \quad \alpha = \delta + \gamma.$$

Решая совместно, получим:

$$\alpha = \delta + n \cdot (\alpha - \beta)$$

$$\text{или } \frac{h}{R} = \frac{h}{R + x} + n \cdot \left( \frac{h}{R} - \frac{h}{R + x_0} \right) \Rightarrow$$

$$x = \frac{n \cdot x_0 \cdot R}{R + x_0 - n \cdot x_0}.$$

Изображение совпадает с самой рыбкой при  $x = x_0$ , значит:

$$x_0 = \frac{n \cdot x_0 \cdot R}{R + x_0 - n \cdot x_0},$$

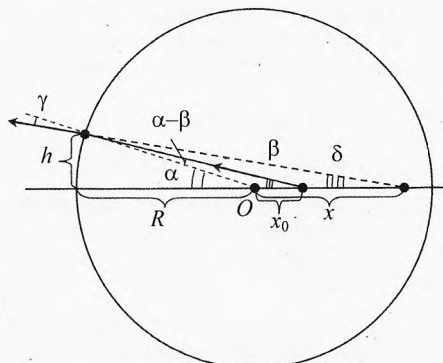


Рис. 13. Рыбка в аквариуме

$$\Rightarrow x_0(R + x_0 - n \cdot x_0 - n \cdot R) = 0.$$

Это уравнение имеет два корня:

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ x_0 = -R. \end{cases}$$

То есть рыбка должна находиться вплотную к передней стенке аквариума, либо в центре аквариума.

По условию скорость рыбки  $v_0 = x'_0$ . Тогда скорость изображения:

$$v = x' = \left( \frac{n \cdot x_0 R}{R + x_0 - n \cdot x_0} \right)' = \frac{n \cdot v_0 R \cdot (R + x_0 - n \cdot x_0) - n \cdot x_0 R \cdot (v_0 - n \cdot v_0)}{(R + x_0 - n \cdot x_0)^2}.$$

Подставляя найденные значения  $x_0$ , найдём:  $v = \begin{cases} n \cdot v_0, \\ v_0 / n. \end{cases}$

**11 (2000-III-11).** На дне двух рядом стоящих стаканов с тонким дном лежит по одинаковой пуговице (рис. 14). Один стакан пустой, а другой заполнен водой. Оба стакана стоят на листе миллиметровой бумаги. Экспериментатор Глюк, рассматривая сверху пуговицы в стаканах, заметил, что видимый диаметр левой пуговицы в сравнении с клетками миллиметровой бумаги составил  $d_1 = 14$  мм, а видимый диаметр правой пуговицы —  $d_2 = 16$  мм. В каком из стаканов налита вода? До какой высоты налита вода, если известно, что расстояние от глаза Глюка до дна каждого из стаканов равно  $H = 28$  см. Показатель преломления воды  $n = 4/3$ .

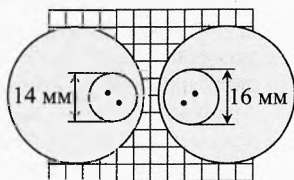


Рис. 14. Пуговица в стакане

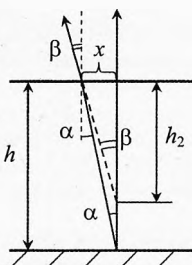


Рис. 15. Приближение дна

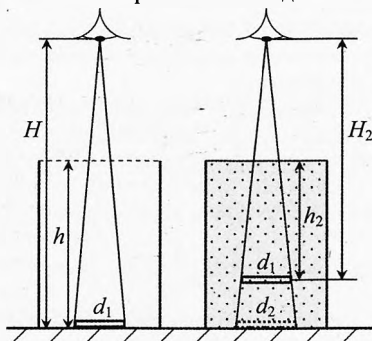


Рис. 16. Сравнение визуальных размеров

**Решение.** Из-за преломления лучей на границе вода–воздух кажущаяся толщина слоя воды будет меньше (рис. 15):

$$\beta \approx \alpha \cdot n, \quad \beta \approx \frac{x}{h_2}, \quad \alpha \approx \frac{x}{h}; \quad \Rightarrow \quad h_2 \approx \frac{h}{n}.$$

Пуговица, не меняя размеров, визуально приблизится. Это явление будет восприниматься наблюдателем, как увеличение видимого диаметра пуговицы от  $d_1$  до  $d_2$  (рис. 16):

$$\frac{d_1}{H_2} = \frac{d_2}{H}, \text{ где } H_2 = H - (h - h_2) = H - (h - \frac{h}{n}).$$

$$\Rightarrow \frac{d_1}{H - h \cdot \frac{n-1}{n}} = \frac{d_2}{H} \Rightarrow h = H \cdot \frac{n}{n-1} \cdot (1 - \frac{d_1}{d_2}) = 14 \text{ см.}$$

**12 (2008-III-11). Призма в аквариуме.** В аквариуме, заполненном прозрачной жидкостью, закреплена тонкостенная полая равнобедренная призма (рис. 17). Узкий пучок света, распространяющийся параллельно дну аквариума, после прохождения призмы выходит из неё перпендикулярно её боковой грани. Для каких значений показателя преломления жидкости такая ситуация возможна?

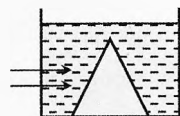


Рис. 17. Призма в аквариуме

**Решение.** Пусть угол при вершине призмы  $\angle ABC = \gamma$  (рис. 18). Углы  $\alpha$  и  $\angle ABD$  равны, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами:  $\alpha = \angle ABD = \gamma/2$ . По условию  $\angle BCA = 90^\circ$ . Значит углы  $\beta$  и  $\angle ABC$  равны, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами:  $\beta = \angle ABC = \gamma$ .

По закону Снеллиуса (призма полая):  $n \cdot \sin \alpha = \sin \beta$ . Подставляя  $\alpha$  и  $\beta$ , получим:

$$n \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = \sin \gamma.$$

Так как  $\sin \gamma = 2 \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$ , то  $n = 2 \cos \frac{\gamma}{2}$ .

По условию задачи луч  $AC$  перпендикулярен  $BC$ , значит угол  $\gamma < 90^\circ$ . С другой стороны  $\gamma > 0^\circ$ . Значит,  $\sqrt{2} < n < 2$ .

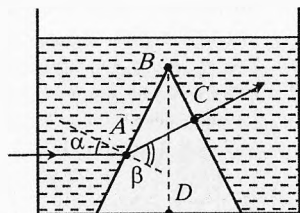


Рис. 18. Призма в аквариуме

**13 (2009-III-11). Интересное соседство.** В речке поймали карася и посадили в шарообразный аквариум радиуса  $R$ , а рядом поставили такой же аквариум с золотой рыбкой (рис. 19). Карасю такая соседка показалась необычной, и он начал с интересом разглядывать её, плавая в центре аквариума. Заметив наблюдение, золотая рыбка тоже замерла в центре аквариума и стала вглядываться в своего соседа. На каком расстоянии с точки зрения карася плавает золотая рыбка, если показатель преломления воды в аквариумах равен  $n = 4/3$ ? Во сколько раз видимый поперечный размер золотой рыбки отличается от её истинного размера? Прямое или перевёрнутое изображение соседки видит карась? Считать, что размеры рыбок много меньше  $R$ .

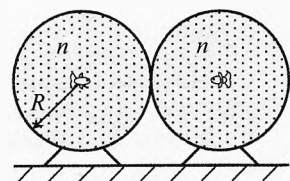


Рис. 19. Рыбки в аквариумах

**Решение.** Карась видит золотую рыбку сквозь тонкую воздушную двояковогнутую ( $R_1 = -R$ ,  $R_2 = -R$ ) линзу с показателем преломления  $1/n$ . Оптическая сила такой тонкой линзы положительна:

$$D = \frac{1}{F} = (n - 1) \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \cdot \left( -\frac{1}{R} - \frac{1}{R} \right) = \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{2}{R} = \frac{1}{2R}.$$

Найдём расстояние  $f$  от места соприкосновения аквариумов до изображения золотой рыбки (рис. 20):

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \Rightarrow f = \frac{F \cdot R}{R - F} = -2 \cdot R.$$

Получилось, что изображение золотой рыбки будет мнимым и находится с той же стороны, что и сама золотая рыбка на расстоянии  $r = 3R$  от караса. Увеличение, даваемое линзой, равно  $\Gamma = \left| \frac{f}{R} \right| = 2$ .

Карась увидит прямое увеличенное изображение рыбки.

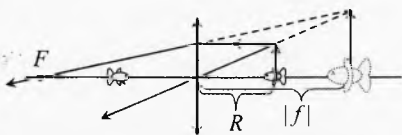


Рис. 20. Изображение золотой рыбки

**14 (2010-III-11). Призма на воде.** Поверхности воды касается равнобедренная стеклянная призма  $ABC$  (рис. 21). Луч света, падающий из воздуха под углом  $\varphi_0$  на  $AC$ , после прохождения призмы выходит через грань  $AB$  под тем же углом  $\varphi_0$ . Чему равен угол преломления  $\varphi_1$ ? Показатель преломления воды  $n_0 = 4/3$ , угол при вершине призмы – прямой. Величина угла  $\varphi_0$  неизвестна.

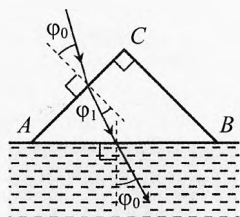


Рис. 21. Призма на воде

**Решение.** Преломление на границе  $AC$  со стеклом с показателем преломления  $n$ :  $\sin \varphi_0 = n \cdot \sin \varphi_1$ .

Преломление на границе  $AB$  с водой (рис. 22):  $n_0 \cdot \sin \varphi_0 = n \cdot \sin \varphi_2$ .

Разделив второе уравнение на первое, получим:  $n_0 = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1}$ .

По теореме о внешнем угле  $\alpha_1$  треугольника  $\triangle DEF$ :  $\varphi_1 + \varphi_2 = \alpha_1$ .

Углы  $\alpha$  и  $\alpha_1$  равны, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Так как призма равнобедренная и прямоугольная, то  $\alpha = 45^\circ$ :

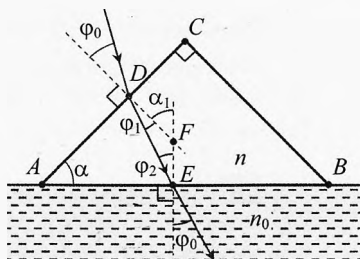


Рис. 22. Призма на воде

$$n_0 = \frac{\sin(\alpha - \varphi_1)}{\sin \varphi_1} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cdot \cos \alpha}{\sin \varphi_1} = \frac{\cos \varphi_1 - \sin \varphi_1}{\sqrt{2} \cdot \sin \varphi_1} = \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi_1}{\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi_1},$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{1}{n_0 \sqrt{2} + 1} = \frac{3}{4 \sqrt{2} + 3} \approx 0,34653, \Rightarrow \varphi_1 \approx 19^\circ.$$

## Задачи IV (зонального) тура

**15 (1999-IV-9).** Только взошло Солнце. По ровной дороге на велосипеде едет со скоростью  $v$  кот Леопольд. А в это время на расстоянии  $r$  от дороги и  $L$  от кота два озорных мышонка пытаются при помощи осколка зеркала попасть «солнечным зайчиком» Леопольду прямо в глаз (рис. 23). С какой угловой скоростью  $\omega$  мышата должны поворачивать зеркальце, чтобы слепить кота?

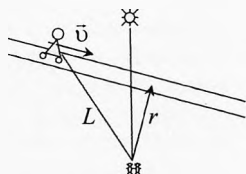


Рис. 23. Солнечный зайчик

**Решение.** Пусть за небольшое время  $\Delta t$  зеркальце повернулось на угол  $\Delta\phi$  (рис. 24). Тогда луч света по законам отражения повернётся на двойной угол  $\Delta\alpha = 2 \cdot \Delta\phi$ ,  $\Delta\alpha = \frac{(v \cdot \Delta t) \cdot \cos \alpha}{L}$ ,

$$\cos \alpha = \frac{r}{L}; \Rightarrow \omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{v \cdot r}{2L^2}.$$

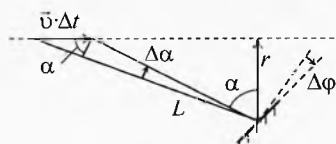


Рис. 24. Солнечный зайчик

**16 (1994-IV-11).** На сколько процентов изменится фокусное расстояние плосковыпуклой линзы при её нагреве от  $0^\circ\text{C}$  до  $100^\circ\text{C}$ , если при  $0^\circ\text{C}$  фокусное расстояние равно  $F_0$ , а показатель преломления  $n$ ? Коэффициент линейного расширения материала линзы  $\alpha = 25 \cdot 10^{-6}$  град $^{-1}$ . Линза изготовлена из материала, у которого  $(n-1) \sim \rho$ , где  $\rho$  – плотность материала линзы.

**Решение.** Луч, параллельный главной оптической оси, преломится только на сферической поверхности (рис. 25):

$$\delta = \phi_1 \cdot n,$$

$$\text{где } \delta = \phi_1 + \phi_2, \phi_1 = \frac{h}{R}, \phi_2 = \frac{h}{F}.$$

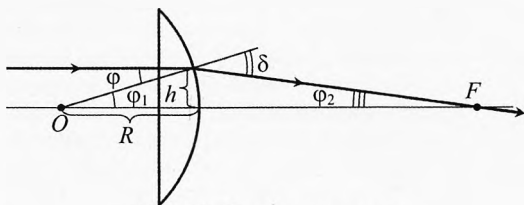


Рис. 25. Нагревание линзы

$$\frac{h}{R} + \frac{h}{F} = \frac{h}{R} \cdot n, \Rightarrow \frac{1}{F} = \frac{(n-1)}{R}, \Rightarrow F = \frac{R}{(n-1)}.$$

Можно было получить это же выражение, как частный случай формулы тонкой линзы ( $R_1 = \infty$ ,  $R_2 = R$ ):  $\frac{1}{F} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ . Однако для решения некоторых задач необходимо уметь произвести построение луча и расчёт углов.

$$\text{Учитывая, что } V = V_0(1 + 3\alpha \cdot \Delta t), \text{ получим: } (n-1) \sim \rho \sim \frac{1}{V} \sim \frac{1}{1 + 3\alpha \cdot \Delta t}.$$

Учитывая, что  $R = R_0(1 + \alpha \cdot \Delta t)$ , получим, что фокусное расстояние увеличилось на 1%:

$$F = \frac{R_0(1 + \alpha \cdot \Delta t)(1 + 3\alpha \cdot \Delta t)}{(n_0 - 1)} \quad \text{или} \quad F \approx F_0 \cdot (1 + 4\alpha \cdot \Delta t) = 1,01 \cdot F_0.$$



**17 (1995-IV-10).** Маленький источник звука  $A$  и маленький микрофон  $B$  расположены на расстоянии  $L = 1$  м друг от друга. В некоторый момент времени начинает дуть ветер (рис. 26). Во сколько раз изменилась мощность звука, поглощаемая микрофоном, если известно, что скорость ветра  $v = 15$  м/с, а скорость звука  $c = 340$  м/с? Ветер не приводит к возникновению завихрений воздуха.

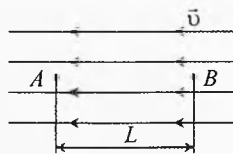


Рис. 26. Ветер сносит звук

**Решение.** Из-за ветра звук сносится по направлению ветра. При этом в системе отсчёта, движущейся со скоростью  $\vec{v}$ , где воздух неподвижен, микрофон убеждает от звука, поэтому звуковой волне придётся пройти расстояние  $l$  (большее, чем  $L$ ), чтобы достичь микрофона:  $l = c \cdot t = c \cdot \frac{L}{(c-v)}$ . Мощность звуковой волны, поглощаемой микрофоном, обратно пропорциональна расстоянию от источника до приемника в системе отсчёта, связанной с воздухом:  $\frac{P}{P_0} = \frac{L^2}{l^2} = \frac{(c-v)^2}{c^2} = 0,91$ .

**18 (1997-IV-10).** В трубе установлена собирающая линза (рис. 27). Слева от неё падает параллельный пучок света, который собирается в фокусе линзы. Как изменится (увеличится, останется прежним, уменьшится) фокусное расстояние  $F$  линза-вода, если: а) в левую часть трубы залить воду, а в правой оставить воздух; б) в левой оставить воздух, а в правую залить воду? Известно, что показатель преломления материала линзы больше показателя преломления воды ( $n > n_{\text{в}}$ ). Рассмотреть все возможные варианты.

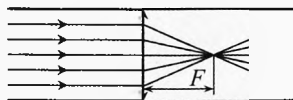


Рис. 27. Линза в трубе с водой

**Решение.** Собирающая линза в воздухе может иметь три формы: плосковыпуклая, двояковыпуклая, вогнуто-выпуклая.

Формула для тонкой линзы в общем случае:

$$\frac{(n-n_1)}{R_1} + \frac{(n-n_2)}{R_2} = \frac{n_1}{d} + \frac{n_2}{f}$$

Лучи от бесконечно удалённого источника ( $d = \infty$ ) соберутся в фокусе ( $f = F$ ), значит:

$$\frac{(n-n_1)}{R_1} + \frac{(n-n_2)}{R_2} = \frac{n_2}{F}$$

Если линза находится в воздухе ( $n_1 = 1, n_2 = 1$ ), то:

$$\frac{(n-1)}{R_1} + \frac{(n-1)}{R_2} = \frac{1}{F_0} \quad (1)$$

Если вода налита слева от линзы ( $n_1 = n_{\text{в}}, n_2 = 1$ ), то:

$$\frac{(n-n_{\text{в}})}{R_1} + \frac{(n-1)}{R_2} = \frac{1}{F_{\text{лев}}} \quad (2)$$

Выражая  $R_2$  из (1) и подставляя в (2), получим:

$$\frac{(n-n_{\text{в}})}{R_1} + \left( \frac{1}{F_0} - \frac{(n-1)}{R_1} \right) = \frac{1}{F_{\text{лев}}}$$

$$F_{\text{лев}} = \frac{1}{\frac{1}{F_0} - \frac{(n_b - 1)}{R_1}} \quad \text{или} \quad F_{\text{лев}} = \frac{F_0}{1 - \frac{F_0(n_b - 1)}{R_1}}.$$

Из анализа последней формулы следует, что:

- 1) если левая поверхность линзы вогнутая ( $R_1 < 0$ ), то  $F_{\text{лев}} < F_0$ ;
- 2) если левая поверхность линзы плоская ( $R_1 = \infty$ ), то  $F_{\text{лев}} = F_0$ ;
- 3) если левая поверхность линзы выпуклая и при этом  $R_1 < F_0(n_b - 1)$ , то  $F_{\text{лев}} < 0$ , значит, линза становится рассеивающей;
- 4) если левая поверхность линзы выпуклая и при этом  $R_1 = F_0(n_b - 1)$ , то  $F_{\text{лев}} = \infty$ , то есть оптическая сила линзы становится равной нулю, и лучи в системе линза–вода после двух преломлений идут под тем же углом, что и раньше.
- 5) если левая поверхность линзы выпуклая и при этом  $R_1 > F_0(n_b - 1)$ , то  $F_{\text{лев}} > F_0$ ;

Аналогично, если вода налита справа от линзы ( $n_1 = 1$ ,  $n_2 = n_b$ ), то:

$$\frac{(n-1)}{R_1} + \frac{(n-n_b)}{R_2} = \frac{n_b}{F_{\text{прав}}}. \quad (3)$$

Выражая  $R_1$  из (1) и подставляя в (3), получим:

$$\left( \frac{1}{F_0} - \frac{(n-1)}{R_2} \right) + \frac{(n-n_b)}{R_2} = \frac{n_b}{F_{\text{прав}}},$$

$$F_{\text{прав}} = \frac{n_b}{\frac{1}{F_0} - \frac{(n_b - 1)}{R_2}} \quad \text{или} \quad F_{\text{прав}} = \frac{F_0 n_b}{1 - \frac{F_0(n_b - 1)}{R_2}}.$$

Из анализа последней формулы следует, что:

- 6) если правая поверхность линзы вогнутая ( $R_2 < 0$ ) и при этом  $|R_2| > F_0$ , то  $F_{\text{прав}} > F_0$ ;
- 7) если правая поверхность линзы вогнутая ( $R_2 < 0$ ) и при этом  $|R_2| < F_0$ , то  $F_{\text{прав}} < F_0$ ;
- 8) если правая поверхность линзы вогнутая ( $R_2 < 0$ ) и при этом  $|R_2| = F_0$ , то  $F_{\text{прав}} = F_0$ ;
- 9) если правая поверхность линзы плоская ( $R_2 = \infty$ ), то  $F_{\text{прав}} > F_0$ ;
- 10) если правая поверхность линзы выпуклая ( $R_2 > 0$ ), и при этом  $R_2 < F_0(n_b - 1)$ , то  $F_{\text{прав}} < 0$ , то есть линза становится рассеивающей;
- 11) если правая поверхность линзы выпуклая ( $R_2 > 0$ ), и при этом  $R_2 = F_0(n_b - 1)$ , то  $F_{\text{прав}} = \infty$ , то есть оптическая сила линзы становится равной нулю, и лучи в системе линза–вода после двух преломлений идут под тем же углом, что и раньше.
- 12) если правая поверхность линзы выпуклая ( $R_2 > 0$ ), и при этом  $R_2 > F_0(n_b - 1)$ , то  $F_{\text{прав}} > F_0$ .

**Примечание.** В авторском решении этой задачи использовался умозрительный метод решения задачи вообще без использования формулы тонкой линзы, поэтому в их решении не были рассмотрены случаи 3), 4), 10) и 11).

**19 (2002-IV-9).** Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли чертёж оптической схемы (рис. 28), на котором были изображены тонкая собирающая линза, её фокусы и ход луча, идущего через линзу. От времени чернила выцвели, и на чертеже от луча остались видны только две точки  $A$  и  $B$ . Восстановить по этим данным ход луча.

**Решение.** Пусть  $A$  – точечный источник света. Проведём от него луч  $AD$  параллельно главной оптической оси (рис. 29), этот луч после преломления пройдёт через фокус  $F'$ . Также проведём луч  $AO$  через оптический центр линзы, этот луч пройдёт через линзу, не преломляясь. Продолжим лучи  $DF$  и  $AO$  до пересечения в точке  $A'$  – мнимом изображении источника  $A$ .

Наблюдателю, находящемуся справа от линзы, будет казаться, что все лучи распространяются от мнимого источника  $A'$ . Пусть  $A'B$  пересекает плоскость линзы в точке  $C$ , тогда  $AC$  и  $CB$  – части искомого луча.

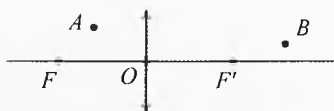


Рис. 28. Восстановить ход луча

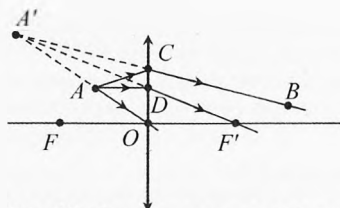


Рис. 29. Восстановление хода луча

**20 (2001-IV-9).** Два плоских зеркала  $M_1$  и  $M_2$ , каждое из которых имеет форму квадрата со стороной  $a$ , сложены под прямым углом. Точечный источник света  $S$  располагается на расстоянии  $a$  от каждого из зеркал (рис. 30). Заштрихуйте области, находясь в которых наблюдатель сможет увидеть ровно  $n$  изображений источника  $S$ ; принять  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . Наблюдатель находится в плоскости рисунка.

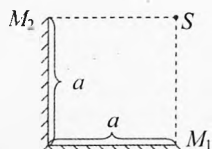


Рис. 30. Источник и два зеркала

**Решение.** Идущий от источника  $S$  луч может:

- не отражаться от зеркала;
- отразиться только от зеркала  $M_1$ ;
- отразиться только от зеркала  $M_2$ ;
- отразиться от зеркала  $M_1$ , затем от зеркала  $M_2$ ;
- отразиться от зеркала  $M_2$ , затем от зеркала  $M_1$ .

В результате получится три мнимых изображения:

- $S_1$  в зеркале  $M_1$ ;
- $S_2$  в зеркале  $M_2$ ;
- $S_3$  в зеркале  $M_1$ , затем  $M_2$  (либо сначала в зеркале  $M_2$ , затем  $M_1$ ).

На рис. 31 отмечены области, где видны 0, 1, 2 и 3 изображения одновременно.

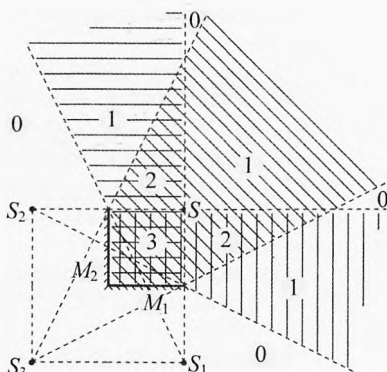


Рис. 31. Области видимости изображений

## Задачи V (заключительного) тура

**21** (1999-V-9). В архиве Спеллиуса нашли чертёж, на котором были изображены два плоских зеркала  $M_1$  и  $M_2$ , образующих двугранный угол в  $70^\circ$ , и точечный источник света  $S_0$  (рис. 32). От времени чернила выцвели, и невозможно было разглядеть, сколько изображений источника  $S_0$  давала такая система зеркал. Попробуйте восстановить все изображения источника  $S_0$ . Сколько изображений источника можно было увидеть в такой системе зеркал?

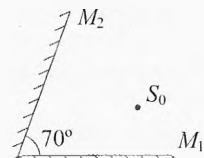


Рис. 32. Сколько будет изображений?

**Решение.** В плоском зеркале изображение точечного источника расположено симметрично этому источнику относительно плоскости зеркала. Если получившееся в зеркале изображение окажется с отражающей стороны другого зеркала, то оно отразится и во втором зеркале. В данном случае (рис. 33) все изображения лежат на окружности радиуса  $S_0O$  с центром в точке  $O$ :

$S_1$  — изображение источника  $S_0$  в зеркале  $M_1$ ;

$S_{12}$  — изображение мнимого источника  $S_1$  в зеркале  $M_2$ .

$S_{121}$  — изображение мнимого источника  $S_{12}$  в зеркале  $M_1$  (лучи от источника  $S_0$  отражаются сначала от зеркала  $M_1$ , затем от зеркала  $M_2$ , а затем снова от зеркала  $M_1$ ).

$S_2$  — изображение источника  $S_0$  в зеркале  $M_2$ ;

$S_{21}$  — изображение мнимого источника  $S_2$  в зеркале  $M_1$ .

Мнимые источники  $S_{121}$  и  $S_{21}$  оказались в секторе  $AOB$ , то есть с обратной (не отражающей) стороны обоих зеркал, поэтому они не могут дать дополнительных изображений.

Итак, в такой системе зеркал от источника  $S_0$  можно было увидеть пять изображений.

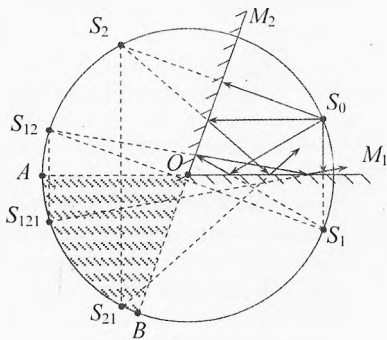


Рис. 33. Изображения в двух зеркалах

**22** (2001-V-10). На поверхности плоского зеркала а лежит тонкая симметричная двояковыпуклая линза с фокусным расстоянием  $F_0 = 8$  см (рис. 34а). Где будет находиться изображение точечного источника, помещённого на расстоянии  $d_1 = F_0$  от линзы? На поверхность зеркала наливают воду так, что уровень воды совпадает с плоскостью симметрии линзы (рис. 34б). Если теперь точечный источник поместить на расстоянии  $d_2 = 12$  см от линзы, то его изображение совпадёт с самим источником. На каком расстоянии от линзы нужно расположить точечный источник, чтобы его изображение совпало с ним самим, если вода полностью скрыла линзу (рис. 34в)? Оптические силы тонких линз расположенных вплотную друг к другу, складываются.

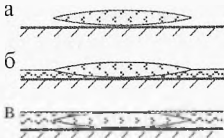


Рис. 34. Линза на зеркале с водой

**Решение.** В первом случае свет от источника дважды проходит через линзу. Следовательно, система эквивалентна линзе с оптической силой  $D_1 = 2D_0$  или  $F_1 = F_0/2 = 4$  см. Поскольку источник находится на двойном фокусном расстоянии

этой системы ( $d_1 = 2F_1$ ), то его изображение тоже будет на двойном фокусном расстоянии  $f_1 = 2F_1 = 8$  см, то есть будет совпадать с самим источником.

Если линза наполовину погружена в воду, то оптическая сила системы  $D_2 = 2D_0 + 2D$  или  $\frac{1}{F_2} = \frac{2}{F_0} + 2D$ , где  $D$  – оптическая сила водяной плосковогнутой

рассеивающей линзы ( $D < 0$ ), лучи дважды проходят и сквозь стеклянную линзу и сквозь водяную линзу. По условию задачи изображение совпадает с источником, значит, они находятся на двойном фокусном расстоянии ( $d_2 = f_2 = 2F_2$ ). Выразим отсюда  $F_2$  и подставим в предыдущее уравнение:  $\frac{2}{d_2} = \frac{2}{F_0} + 2D \Rightarrow D = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{F_0}$ .

В третьем случае:  $D_3 = 2D_0 + 4D$  или  $\frac{1}{F_3} = \frac{2}{F_0} + 4D$ . Поскольку изображение опять совпадает с предметом ( $d_3 = f_3 = 2F_3$ ), то  $\frac{2}{d_3} = \frac{2}{F_0} + 4D$ . Подставляя выраже-

ние для  $D$ , найдём:  $d_3 = \frac{F_0 d_2}{2F_0 - d_2} = 24$  см.

Ответ.  $f_1 = 8$  см,  $d_3 = 24$  см.

### 23 (1993-V-11). Для измерения

скорости мельчайших частиц, взвешенных в текучей жидкости, используется интерференционная схема, изображённая на рис. 35. Параллельный пучок света от лазера с длиной волны  $\lambda = 0,63$  мкм падает на две одинаковые призмы, сложенные основаниями (бипризма). Преломляющий угол каждой из призм  $\alpha = 5,7^\circ$ , показатель преломления  $n = 1,5$ . После прохождения сквозь бипризму свет разбивается на два пучка, которые проходят сквозь кювету с жидкостью. Частицы, двигаясь вместе с жидкостью с некоторой скоростью  $v$ , рассеивают свет. Определить скорость частиц, если известно, что при регистрации рассеянного света фотоприёмником ФП частота колебаний тока фотоприёмника  $\nu = 10$  кГц.

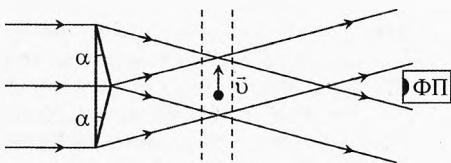


Рис. 35. Измерение скорости частиц

**Решение.** Найдём угол отклонения  $\gamma$  луча, падающего на призму (рис. 36):

$$\frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \alpha} = n, \Rightarrow \frac{\alpha + \gamma}{\alpha} \approx n, \Rightarrow \gamma \approx \alpha(n - 1).$$

Итак, два когерентных параллельных пучка сходятся после призмы под углом  $2\gamma$ , создавая интерференционную картину (рис. 37). Выберем в плоскости движения частиц ( $y = 0$ )

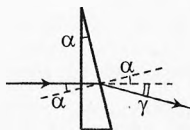


Рис. 36. Отклонение луча призмой

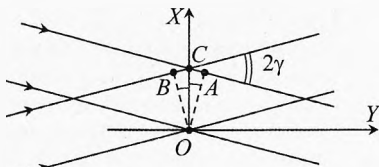


Рис. 37. Интерференция пучков

точку  $C$  с координатой  $x$ . В этой точке происходит сложение двух волн, причём колебания световых волн от верхнего пучка в точке  $C$  опережают колебания в точке

$O$  на  $\Delta_1 = CA = x \cdot \gamma$ , а от нижнего пучка настолько же отстают:  $\Delta_2 = BC = x \cdot \gamma$ . Общая разность хода двух волн в точке  $C$  по сравнению с точкой  $O$ :

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = 2x \cdot \gamma$$

Расстояние между соседними максимумами интенсивности света (ширина интерференционных полос):  $\Delta = \lambda$ ,  $\Rightarrow x_m = \frac{\lambda}{2\gamma} = \frac{\lambda}{2\alpha(n-1)}$ .

Двигаясь вдоль оси  $X$  со скоростью  $v$ , частицы периодически пересекают области максимальной и минимальной интенсивности света, рассеивая свет во все стороны с такой же периодичностью. Период  $T$  колебаний рассеянного света равен времени, за которое частица перемещается на расстояние, равное ширине полосы:

$$v = \frac{x_m}{T} = \frac{\lambda}{2\alpha(n-1)} \cdot \frac{1}{T} \quad \text{или} \quad v = \frac{\lambda \cdot v}{2\alpha(n-1)} = 6,3 \text{ см/с.}$$

**24 (1994-V-11).** Прямоугольный аквариум длины  $L = 50$  см разделен перегородкой на два отсека. В центре перегородки находится симметричная двояковыпуклая линза. На левой стенке аквариума в центре нарисована стрелка (рис. 38). Длина стрелки равна  $h$ . Если в левый отсек аквариума налить жидкость, то на стенке его правого отсека появится чёткое изображение стрелки. Длина изображения  $h_1 = 4,5$  мм. Если ту же жидкость налить в правый отсек аквариума, вылив её из левого, то на стенке правого отсека вновь будет видно чёткое изображение стрелки. Длина изображения  $h_2 = 2$  мм. Найти длину стрелки  $h$ , показатель преломления света в жидкости и расстояние между линзой и стенками аквариума.

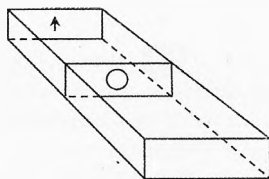


Рис. 38. Линза в аквариуме

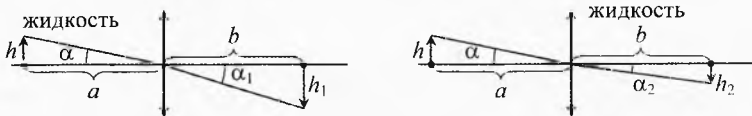


Рис. 39. Ход лучей в аквариуме

**Решение.** На рис. 39 показан ход луча, вышедшего из вершины стрелки в направлении оптического центра линзы. Этот луч преломляется только на границе вода–стекло (в оптическом центре линза в первом приближении представляет собой плоскопараллельную пластинку, и если бы не было воды, то луч прошел бы через оптический центр линзы, не преломляясь):

$$n_{\text{ж}} \cdot \sin \alpha = \sin \alpha_1, \quad \sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{h}{a}, \quad \sin \alpha_1 \approx \tan \alpha_1 = \frac{h_1}{b}; \quad \Rightarrow n_{\text{ж}} \cdot \frac{h}{a} = \frac{h_1}{b}. \quad (1)$$

Аналогично для второго случая:

$$\sin \alpha = n_{\text{ж}} \cdot \sin \alpha_2, \quad \sin \alpha \approx \frac{h}{a}, \quad \sin \alpha_2 \approx \frac{h_2}{b}; \quad \Rightarrow \frac{h}{a} = n_{\text{ж}} \cdot \frac{h_2}{b}. \quad (2)$$

Разделив (1) на (2), найдём показатель преломления жидкости:

$$n_{\text{ж}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} = 1,5.$$

$$\text{Умножив (1) на (2) получим: } n_{\text{ж}} \cdot \frac{h}{a} \cdot \frac{h}{a} = n_{\text{ж}} \cdot \frac{h_2}{b} \cdot \frac{h_1}{b} \Rightarrow h = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{h_1 h_2}.$$

Формула тонкой линзы для случая разных сред имеет вид:

$$\frac{(n - n_1)}{R_1} + \frac{(n - n_2)}{R_2} = \frac{n_1}{d} + \frac{n_2}{f}.$$

Для случаев, когда жидкость налита в одном из отсеков:

$$\frac{(n - n_{\text{ж}})}{R_1} + \frac{(n - 1)}{R_2} = \frac{n_{\text{ж}}}{a} + \frac{1}{b}, \quad \frac{(n - 1)}{R_1} + \frac{(n - n_{\text{ж}})}{R_2} = \frac{1}{a} + \frac{n_{\text{ж}}}{b}.$$

Так как по условию линза симметричная ( $R_1 = R_2$ ), то левые части двух последних уравнений совпадают, а значит правые части уравнений равны друг другу:

$$\frac{n_{\text{ж}}}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{n_{\text{ж}}}{b} \Rightarrow \frac{n_{\text{ж}} - 1}{a} = \frac{n_{\text{ж}} - 1}{b}.$$

Показатель преломления жидкости не равен единице ( $n_{\text{ж}} \neq 1$ ), значит,  $a = b = 0,5 \cdot L = 25$  см. Используя полученную ранее формулу, найдём:

$$h = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{h_1 h_2} = \sqrt{h_1 h_2} = 3 \text{ мм}.$$

**25 (1995-V-11).** Излучение аргонового лазера сфокусировано на плоском фотокатоде. Между плоским анодом, расположенным параллельно фотокатоду, и фотокатодом подключают источник питания с постоянной ЭДС. При ускоряющей разности потенциалов между анодом и фотокатодом диаметр пятна фотоэлектронов на аноде в два раза больше, чем при обратной полярности подключения, то есть при такой же тормозящей разности потенциалов. Работа выхода материала фотокатода  $A_0 = 2$  эВ. Длина волны излучения лазера  $\lambda = 500$  нм. Определить ЭДС источника.

**Решение.** Согласно уравнению Эйнштейна, найдём скорость электронов у поверхности катода:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{mv_0^2}{2} + A_0.$$

При ускоряющем напряжении (когда на анод подключён «+») радиус  $R_1$  пятна на аноде определяется электронами, начальная скорость которых параллельна пластинам (рис. 40а):

$$d = \frac{av_1^2}{2}, \quad R_1 = v_0 \cdot \tau_1; \Rightarrow R_1 = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2d}{a}},$$

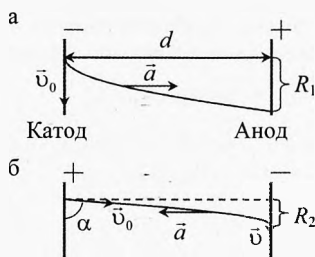
где  $a = \frac{F_e}{m} = \frac{E \cdot e}{m} = \frac{U \cdot e}{d \cdot m}$  – ускорение электронов, создаваемое электрическим полем, оно одинаково в обоих случаях.

При запирающем напряжении радиус  $R_2$  пятна на аноде определяется электронами, у которых нормальная составляющая конечной скорости около анода равна нулю (рис. 40б):

$$v_0 \sin \alpha - a \cdot \tau_2 = 0, \quad v_0 \sin \alpha \cdot \tau_2 - \frac{a \cdot \tau_2^2}{2} = d; \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{2ad}}{v_0}, \quad \tau_2 = \sqrt{\frac{2d}{a}},$$

где  $\alpha$  – угол между начальной скоростью электрона и плоскостью катода.

$$\text{Тогда радиус пятна: } R_2 = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot \tau_2 = v_0 \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \cdot \tau_2 = \sqrt{v_0^2 - 2ad} \cdot \sqrt{\frac{2d}{a}}.$$



**Рис. 40.** Траектория фотоэлектронов

По условию  $R_1 = 2R_2$ :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{v_0 \cdot \sqrt{\frac{2d}{a}}}{\sqrt{v_0^2 - 2ad} \cdot \sqrt{\frac{2d}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2ad}{v_0^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{U \cdot e}{\frac{hc}{\lambda} - A_n}}} = 2.$$

Значит, ЭДС источника:  $U = \frac{3}{4e} \left( \frac{hc}{\lambda} - A_n \right) = 0,36 \text{ В}.$

**26 (1999-V-11).** Лазерный луч распространяется в сферически симметричной среде с показателем преломления  $n = n_0 \cdot \frac{r}{r_0}$ , где  $n_0 = 1$ ,  $r_0 = 30 \text{ см}$ ,  $r \geq r_0$ . Траектория луча лежит в плоскости, проходящей через центр симметрии  $C$  среды. Известно, что на расстоянии  $r_1 = 80 \text{ см}$  от точки  $C$  лазерный луч образует с радиус-вектором, проведённым из центра, угол  $\varphi_1 = 30^\circ$  (рис. 41). На какое минимальное расстояние приблизится лазерный луч к центру симметрии среды?

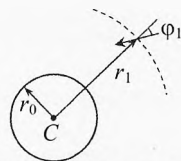


Рис. 41. Сферически симметричная среда

**Решение.** Заменим заданную сферически симметричную среду с непрерывным распределением показателя преломления  $n(r)$  сферически слоистой средой (рис. 42). Рассмотрим два тонких сферических слоя радиусами  $r_1$  и  $r_2$ . Луч, падающий на первый слой под углом  $\varphi_1$ , преломится под углом  $\alpha$ :

$$n_1 \cdot \sin \varphi_1 = n_2 \cdot \sin \alpha.$$

По теореме синусов для  $\triangle ABO$ :

$$\frac{\sin \alpha}{r_2} = \frac{\sin \varphi_2}{r_1}.$$

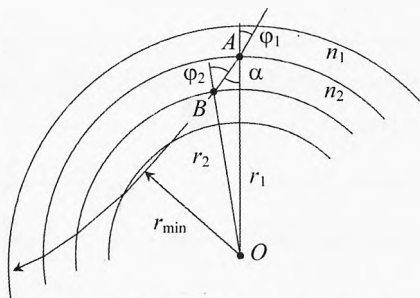


Рис. 42. Преломление луча на слоях сферы

Исключая из этих уравнений  $\sin \alpha$ , получим:

$$n_1 \cdot r_1 \cdot \sin \varphi_1 = n_2 \cdot r_2 \cdot \sin \varphi_2.$$

Это соотношение означает, что для луча, распространяющегося в сферически однородной среде, выполняется равенство:

$$n \cdot r \cdot \sin \varphi = \text{const}.$$

По условию задачи  $n = n_0 \cdot \frac{r}{r_0}$ , поэтому  $n_0 \cdot \frac{r^2}{r_0} \cdot \sin \varphi = \text{const}.$

При минимальном расстоянии от центра симметрии до траектории луча угол  $\varphi_{\min} = 90^\circ$ , следовательно:

$$n_0 \cdot \frac{r_1^2}{r_0} \sin 30^\circ = n_0 \cdot \frac{r_{\min}^2}{r_0} \sin 90^\circ, \Rightarrow r_{\min} = r_1 \cdot \sqrt{\sin 30^\circ} \approx 56,6 \text{ см}.$$

Заметим, что  $r_{\min} > r_0$ , значит условие на показатель преломления ( $r \geq r_0$ ) выполняется на протяжении всего пути луча.



# Приложение

## Основные формулы

### 1. Предварительные сведения о волнах

Частота, период, скорость, длина волны:  $\nu = \frac{1}{T}$ ;  $\nu = \lambda \cdot \nu$ ;  $\nu = \frac{\lambda}{T}$ ;  $\lambda = \nu \cdot T$ .

Скорость продольных механических волн в газе:  $v_{\parallel} = \sqrt{\gamma \cdot \frac{p}{\rho}}$ , где  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ .

Скорость продольных механических волн в твердом (или жидком) теле:  $v_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ .

Скорость поперечных механических волн в твердом теле:  $v_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ .

Уравнение бегущей волны:  $x = X_m \cos[\omega t - k \cdot y]$ , где  $k = \frac{\omega}{v}$  – волновое число,  $[k] = \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ .

Поток энергии через поверхность:  $P = \frac{W}{t}$ .

Объемная плотность энергии:  $w = \frac{\delta W}{\delta V}$ .

Плотность потока энергии, вектор Умова–Пойнтинга:  $j = \frac{P}{S_{\perp}}$  или  $j = \frac{W}{S_{\perp} \cdot t}$ ;  $\vec{j} = w \vec{v}$ ;  $j = k \cdot X_m^2$ .

Плотность потока энергии сферической волны убывает пропорционально квадрату расстояния от источника:  $\frac{j}{j_0} = \frac{r_0^2}{r^2}$ .

Уравнение стоячей волны:  $x = 2X_m \cdot \sin\left(\frac{\omega}{v} \cdot y\right) \cdot \cos(\omega t)$  или  $x = 2X_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot y\right) \cdot \cos(\omega t)$ .

Условие стоячей волны:  $l = n \cdot \frac{\lambda}{2}$ , или  $\lambda = \frac{2l}{n}$ , или  $\nu = \frac{v}{2l} \cdot n$ .

### 2. Звуковые волны

Интенсивность звука (средняя за период плотность потока энергии):  $\bar{j} = \frac{\bar{W}}{S_{\perp} \cdot t}$ .

Звуковое давление:  $p_{\text{зв}} = |p - p_0|$ .

Уровень громкости звука:  $L = \lg\left(\frac{j}{j_0}\right)$ , где  $j_0 = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$ ;  $\frac{j_1}{j_2} = 10^{L_1 - L_2}$ .

### 3. Общие свойства волн

Угол падения равен углу отражения:  $\alpha = \gamma$ .

Угол падения и преломления (закон Снелля):  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$ ;  $n_1 \cdot \sin \alpha_1 = n_2 \cdot \sin \alpha_2$ ;  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$ .

Показатель преломления:  $n = \frac{v_1}{v_2}$ ;  $n_1 v_1 = n_2 v_2$ ,  $n = \frac{n_2}{n_1}$ .

Абсолютный показатель преломления:  $n = \frac{c}{v}$ .

Полное внутреннее отражение ( $\beta = 90^\circ$ ):  $\frac{\sin \alpha_{\text{вп}}}{\sin 90^\circ} = \frac{n_2}{n_1}$ ;  $\sin \alpha_{\text{вп}} = \frac{n_2}{n_1}$ .

Закон Малюса:  $I = k \cdot I_0 \cdot \cos^2 \varphi$ , где  $k$  – коэффициент прозрачности анализатора.

Закон Брюстера (полная поляризация отраженного света при угле падения):  $\text{tg} \alpha_{\text{Бр}} = n$ .

Интенсивность волн при интерференции:  $I_{\text{max}} = I_1 + 2 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2} + I_2$ ;  $I_{\text{min}} = I_1 - 2 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2} + I_2$ .

Видность интерференционной картины:  $V = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}}$ .

Интерференция в опыте Юнга, дифракции на двух щелях и в дифракционной решетке:

– условие максимума излучения:  $\Delta_{\text{max}} = k \cdot \lambda$ ;  $d \cdot \sin \varphi_{\text{max}} \approx k \cdot \lambda$ ;  $x_{\text{max}} \approx \frac{k \cdot \lambda \cdot L}{d}$ , где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

– минимум излучения:  $\Delta_{\text{min}} = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$ ;  $d \cdot \sin \varphi_{\text{min}} \approx (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$ ;  $x_{\text{min}} \approx (2k+1) \cdot \frac{\lambda \cdot L}{2d}$ , где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

– расстояние между соседними интерференционными полосами:  $\Delta x = \frac{\lambda \cdot L}{d}$ .

Радиусы колец Ньютона: темные  $r_k = \sqrt{\frac{k \cdot R \cdot \lambda}{n}}$ ; светлые:  $r_k = \sqrt{\frac{R \cdot \lambda}{n} \cdot (k - \frac{1}{2})}$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$

Просветлённая оптика:  $\Delta = 2d$ ,  $d = \frac{\lambda_{\text{нл}}}{4}, \frac{3\lambda_{\text{нл}}}{4}, \frac{5\lambda_{\text{нл}}}{4}, \dots$ ,  $\Delta = \frac{\lambda_{\text{нл}}}{2}, \frac{3\lambda_{\text{нл}}}{2}, \frac{5\lambda_{\text{нл}}}{2}, \dots$

Дифракция от круглого отверстия, угловой радиус центрального светлого пятна:  $\varphi_1 \approx \frac{\lambda}{D}$ .

Острота зрения, разрешающая способность глаза:  $V = \frac{1}{\Delta \varphi}$ .

Разрешающая способность телескопа – радиус видимого изображения звезды:  $r = \frac{\lambda \cdot F}{D}$ .

Расстояние между точками, которые видны отдельно в микроскопе:  $h = \frac{\lambda \cdot d}{D}$ ,  $h_{\text{min}} \approx \lambda$ .

Угловая дисперсия дифракционной решётки:  $D_\varphi = \frac{\Delta \varphi}{\Delta \lambda}$ ;  $D_\varphi = \frac{k}{d \cdot \cos \varphi}$ .

Скорость света:  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \text{ (Ф/м)} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ (Гн/м)}}} \approx 2,998 \cdot 10^8 \text{ (м/с)} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ (м/с)}$

Мощность излучения антенны при одинаковой амплитуде колебаний силы тока:  $P_{\text{изл}} = k \cdot \nu^4$ .

## 4. Геометрическая оптика

Оптическая длина пути:  $S = n \cdot l$ ,  $S = c \cdot t$ .

Диаметр изображения от круглого отверстия на экране:  $d = D + 2l \cdot \frac{\lambda}{D}$ .

Применимость геометрической оптики:  $2l \cdot \lambda \ll D^2$ .

Фокусное расстояние для сферического зеркала:  $F_{\text{сф}} = \frac{R}{2}$ .

Формула сферического зеркала:  $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \pm \frac{2}{R}$ ,  $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \pm \frac{1}{F}$ .

Оптическая сила зеркала/линзы:  $D = \pm \frac{1}{F}$ .

Увеличение зеркала/линзы:  $\Gamma = \frac{H}{h}$ ;  $\Gamma = \frac{f}{d}$ ;  $\Gamma = \frac{F}{F-d}$ ;  $\Gamma = \frac{F-f}{F}$ .

Видимая толщина слоя жидкости:  $H \approx \frac{h}{n}$ .

Преломление на одной сферической поверхности:  $\frac{(n-1)}{R} = \frac{1}{d} + \frac{n}{f}$ ;  $\frac{(n_2 - n_1)}{R} = \frac{n_1}{d} + \frac{n_2}{f}$ .

Формула тонкой линзы:  $\frac{1}{F} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ ;  $D = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ .

Формула тонкой линзы в разных средах:  $\frac{(n-n_1)}{R_1} + \frac{(n-n_2)}{R_2} = \frac{n}{d} + \frac{n_2}{f}$ .

Система сложенных тонких линз:  $\frac{1}{l - \frac{F_1}{1 - \frac{F_1}{d}}} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F_2}$ ;  $\frac{1}{F} = \frac{1}{F_1 - l} + \frac{1}{F_2}$ .

Система сложенных вплотную тонких линз:  $\frac{1}{F} \approx \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}$ ;  $D \approx D_1 + D_2$ ;  $\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2$ .

Расстояние наилучшего зрения:  $d_0 = 25$  см.

Щадящее и номинальное увеличение лупы:  $\Gamma_{\text{л}} = \frac{H}{H_0}$ ,  $\Gamma_{\text{л.ш}} = \frac{d_0}{F_{\text{л}}}$ ;  $\Gamma_{\text{л.н}} = \frac{d_0}{F_{\text{л}}} + 1$ .

Увеличение микроскопа:  $\Gamma_{\text{м}} = \Gamma_{\text{ог}} \cdot \Gamma_{\text{ок}}$ ;  $\Gamma_{\text{м}} = \frac{(L - F_{\text{ок}} - F_{\text{ог}})d_0}{F_{\text{ог}} \cdot F_{\text{ок}}}$ ;  $\Gamma_{\text{м}} = \frac{\delta \cdot d_0}{F_{\text{ог}} \cdot F_{\text{ок}}}$ ;  $\Gamma_{\text{м}} = D_{\text{ог}} \cdot D_{\text{ок}} \cdot \delta \cdot d_0$ .

Увеличение телескопа:  $\Gamma_{\text{тел}} = \frac{F_{\text{ог}}}{F_{\text{ок}}}$ ;  $\Gamma_{\text{м.тв}} = 2D$ .

Световой поток, собираемый объективом:  $\Phi = E \cdot \frac{\pi D^2}{4}$ .

Относительное отверстие и светосила объектива телескопа:  $A = \frac{D}{F}$ ;  $J = \frac{S}{F^2} = \frac{\pi \cdot A^2}{4}$ .

Разрешающая способность телескопа:  $\theta \approx \frac{\lambda}{D}$  (рад),  $\theta = 206265'' \cdot \frac{\lambda}{D}$ .

Проницающая способность (оптическая мощь) телескопа:  $m_{\text{т}} = 2,1 + 5 \lg D$ ;  $m_{\text{т}} = 6 + 5 \lg \frac{D}{d}$ , где  $D$  выражено в миллиметрах,  $d$  — диаметр человеческого зрачка.

Поле зрения телескопа:  $N = \frac{2000}{\Gamma}$ ,  $[N]$  = угловая минута.

## 5. Тепловое излучение и фотометрия

Закон Стефана–Больцмана:  $j = \sigma \cdot T^4$ .

Закон смещения Вина (максимум излучения АЧТ):  $\lambda_m = \frac{b}{T}$ ,  $b = 2,898 \cdot 10^{-3}$  м·К.

Энергия кванта:  $E_{\gamma} = h\nu$ .

Спектральная светимость АЧТ:  $j_{\nu} = \frac{\Delta j}{\Delta \nu}$ ;  $j_{\nu} = \frac{2\pi \nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1}$ .

Поток излучения:  $\Phi_{\epsilon} = P = \frac{Q_{\epsilon}}{\tau}$ ,  $[\Phi_{\epsilon}] = \text{Вт} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$ .

Световой поток:  $\Phi_{\nu} = \frac{Q_{\nu}}{\tau}$ ,  $[\Phi_{\nu}] = \text{лм}$ .

Сила света:  $I = \frac{\delta \Phi_{\nu}}{\delta \Omega}$ ;  $I = \frac{\delta Q_{\nu}}{\delta t \cdot \delta \Omega}$ ;  $[I] = \text{кд} = \frac{\text{лм}}{\text{ср}}$ .

Телесный угол:  $\Omega = \frac{S_{\perp}}{r^2}$ ,  $\Omega_{\text{полн}} = 4\pi$  (ср).

Энергетическая сила излучения:  $I_e = \frac{\delta \Phi_e}{\delta \Omega}$ ;  $I_e = \frac{\delta W}{\delta t \delta \Omega}$ ,  $[I_e] = \frac{\text{Вт}}{\text{ср}} = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{ср}}$ .

Светоотдача источника:  $\eta_v = \frac{\Phi_v}{\Phi_e}$ ,  $[\eta_v] = \frac{\text{лм}}{\text{Вт}}$ .

Спектральная световая эффективность (видность):  $K(\lambda) = \frac{\Phi_v}{\Phi_e}$ ,  $[K] = \frac{\text{лм}}{\text{Вт}}$ .

Относительная спектральная световая эффективность:  $V = \frac{K_\lambda}{K_\lambda}$ ,  $V = \frac{\Phi_{v\lambda}}{\Phi_{v\lambda}}$  при  $\Phi_{v\lambda} = \Phi_{v\lambda}$ .

Освещённость поверхности:  $E = \frac{\delta \Phi_v}{\delta S}$ ,  $[E] = \text{лк} = \frac{\text{лм}}{\text{м}^2}$ .

Освещённость энергетическая поверхности:  $E_e = \frac{\delta \Phi_e}{\delta S}$  или  $E_e = \frac{\delta P}{\delta S}$ ,  $[E_e] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ .

Закон освещённости:  $E = E_0 \cdot \cos \alpha$ .

Закон освещённости для точечного источника:  $E = \frac{I}{r^2} \cdot \cos \alpha$ ;  $E_0 = \frac{I}{r^2}$ .

Поверхностная яркость источника:  $B = \frac{\delta \Phi_v}{\delta \Omega \cdot \delta S \cdot \cos \theta}$ ;  $B = \frac{I}{\delta S \cdot \cos \theta}$ ,  $[B] = \frac{1 \text{ кд}}{1 \text{ м}^2} = \frac{1 \text{ лм}}{1 \text{ м}^2 \cdot 1 \text{ ср}}$ .

Зависимость освещённости от яркости и угловых размеров источника:  $E = B \cdot \delta \Omega_u$ .

Видимый блеск светила:  $m = 2,5 \cdot \lg \frac{E_0}{E}$ , где  $E_0$  – освещённость от звезды нулевой звездной величины.

Формула Погсона:  $\frac{E_0}{E} = 10^{0,4(m-m_0)}$ ;  $\frac{E_1}{E_2} = 10^{0,4(m_2-m_1)}$  или  $\frac{E_1}{E_2} \approx 2,512^{(m_2-m_1)}$ .

Зависимость видимой звездной величины силы света и расстояния:  $m_2 - m_1 = 2,5 \left( \lg \frac{I_1}{I_2} + 2 \cdot \lg \frac{r_2}{r_1} \right)$ .

Параллакс предмета при перемещении наблюдателя на  $AB$  (базис):  $p \approx \frac{AB}{r}$ .

Горизонтальный параллакс:  $p \approx \frac{R}{r}$ ;  $p'' \approx 206265'' \cdot \frac{R}{r}$ , где  $R$  – радиус Земли.

Годичный параллакс:  $p'' = 206265'' \cdot \frac{a_3}{r}$ , где  $a_3 = 1$  а.е. – большая полуось Земной орбиты.

Оптическая и энергетическая светимость:  $L_v \equiv \Phi_{v,\text{полный}}$ ;  $L_e \equiv \Phi_{e,\text{полный}}$ .

Относительная светимость:  $L_{\text{отн}} = \frac{L}{L_c}$ , где  $L_c$  – соответствующая светимость Солнца.

Относительная оптическая светимость:  $L_{\text{отн}} = 10^{0,4(M_c - M)} = 10^{0,4(4,77 - M)}$ .

Абсолютная звездная величина:  $M = m + 5 + 5 \cdot \lg p''$ ;  $M = m + 5 - 5 \cdot \lg r$ , где  $[r] = \text{пк}$ .

Классический эффект Доплера:  $\lambda = \lambda_0 \left( 1 \pm \frac{v_r}{c} \right)$ .

Радиальная и касательная составляющая скорости звезды  $v_r = c \cdot \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0}$ ;  $v_t = \frac{l_z}{t}$ .

Собственное движение:  $\mu = \alpha_r$ ,  $v_r = 4,74 \cdot \frac{\mu}{p}$  (км/с), где  $p$  измеряется в угловых секундах.

### Основные схемы с тонкими линзами

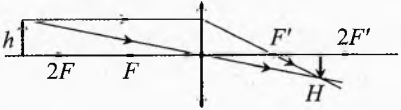
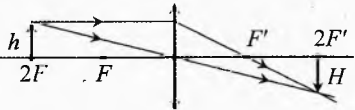
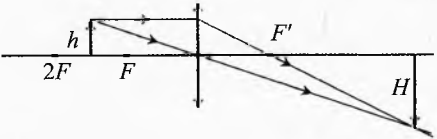

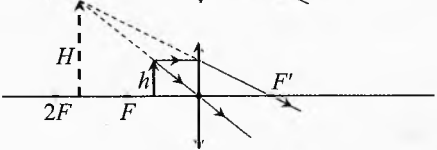
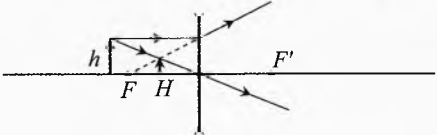
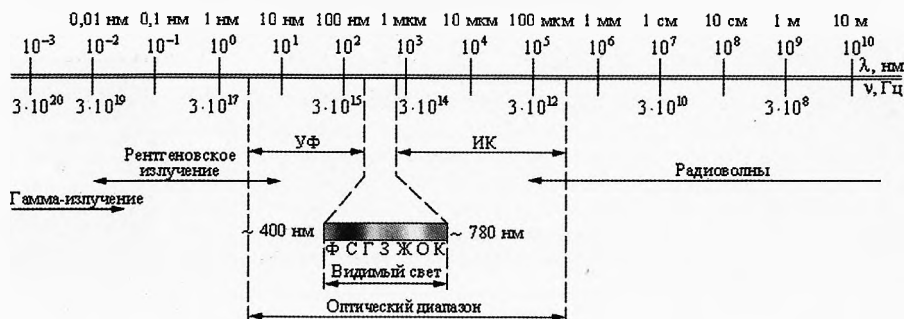
Схема с собирающей линзой	Расстояние от предмета до линзы	Изображение
	$d > 2F$	$\Gamma < 1$ уменьшенное действительное перевернутое
	$d = 2F$	$\Gamma = 1$ размер совпадает действительное перевернутое
	$F < d < 2F$	$\Gamma > 1$ увеличенное действительное перевернутое
	$d = F$	сфокусированного изображения в линзе нет. Лучи от каждой точки расходятся параллельным пучком
	$0 < d < F$	$\Gamma > 1$ увеличенное мнимое прямое

Схема с рассеивающей линзой	Расстояние от предмета до линзы	Изображение
	при любом $d > 0$	$\Gamma < 1$ уменьшенное мнимое прямое

## Шкала электромагнитных волн



## Греческий алфавит

Буква	Название	Буква	Название
Α α	Альфа	Ν ν	Ню
Β β	Бета	Ξ ξ	Кси
Γ γ	Гамма	Ο ο	Омикрон
Δ δ	Дельта	Π π	Пи
Ε ε	Эпсилон	Ρ ρ	Ро
Ζ ζ	Дзета	Σ σ	Сигма
Η η	Эта	Τ τ	Тау
Θ θ	Тета	Υ υ	Ипсилон
Ι ι	Йота	Φ φ	Фи
Κ κ	Каппа	Χ χ	Хи
Λ λ	Лямбда	Ψ ψ	Пси
Μ μ	Мю	Ω ω	Омега

## Приставки СИ (десятичные приставки)

Приставки для дольных единиц			Приставки для кратных единиц		
Приставка	Дольность	Обозначение	Приставка	Кратность	Обозначение
$10^{-1}$	деци	д	дека	$10^1$	да
$10^{-2}$	санتي	с	гекто	$10^2$	г
$10^{-3}$	милли	м	кило	$10^3$	к
$10^{-6}$	микро	мк	мега	$10^6$	М
$10^{-9}$	нано	н	гига	$10^9$	Г
$10^{-12}$	пико	п	тера	$10^{12}$	Т
$10^{-15}$	фемто	ф	пета	$10^{15}$	П
$10^{-18}$	атто	а	экса	$10^{18}$	Э
$10^{-21}$	зепто	з	зетта	$10^{21}$	З
$10^{-24}$	йокто	и	йотта	$10^{24}$	И